

中国科学技术大学

博士学位论文



$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 衰变中 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合 和 Σ 有效电磁形状因子的测量

作者姓名： 宫冠达

学科专业： 粒子物理与原子核物理

导师姓名： 鄢文标 教授 彭海平 教授

完成时间： 二〇二四年二月二十八日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



**Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing in
 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ Decays
and
Measurement of Σ Effective
Electromagnetic Form Factors**

Author: Gong Guanda

Speciality: Particle and Nuclear Physics

Supervisors: Prof. Yan Wenbiao, Prof. Peng Haiping

Finished time: February 28, 2024

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____

签字日期：_____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

控阅的学位论文在解密后也遵守此规定。

☒ 公开 ☐ 控阅（____年）

作者签名：_____

导师签名：_____

签字日期：_____

签字日期：_____

摘 要

中性介子振荡到其反粒子的现象称为中性介子混合，它是味物理实验研究的重要课题之一。 D^0 介子是唯一能发生混合的上型夸克开味介子，对 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的精确测量是寻找超出标准模型的新物理的探针之一。

$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 衰变是测量 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合参数 x 的黄金过程。本文基于 Belle 实验采集的 943 fb^{-1} 数据和 Belle II 实验采集的 407 fb^{-1} 数据中的 $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow c\bar{c} \rightarrow D^{*+} + X$, $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$, $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 样本, 使用模型无关方法测量 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合参数 x 和 y 。样本信号事例数约为 2×10^6 。本文通过同时拟合 16 个达利兹图区间的 D^0 衰变时间和衰变时间误差的分布, 得到混合参数 $x = (3.6 \pm 1.7 \pm 0.4) \times 10^{-3}$ 和 $y = (3.5 \pm 1.4 \pm 0.3) \times 10^{-3}$, 第一项误差为统计误差, 第二项误差为系统误差。这是正负电子对撞机上最精确的测量结果, 也是正负电子对撞机上首个模型无关测量结果。

奇异重子的研究对理解强相互作用、奇异夸克和中子星有重要的意义。奇异重子的电磁形状因子含有结构和动力学信息。本文基于 Belle 实验采集的 980 fb^{-1} 数据, 使用初态辐射方法, 测量了从 $\Sigma\bar{\Sigma}$ 产生阈值到 3 GeV 的 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 反应截面, 首次测量了 $\sqrt{s} \in (2.4, 2.5)$ 和 $\sqrt{s} \in (2.5, 2.6) \text{ GeV}$ 区间的 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 截面。从截面中提取了有效电磁形状因子, 结果与 BESIII 和 BaBar 实验一致。本文同时测量了 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 和 $J/\psi \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 分支比, 结果与 PDG 值一致, 验证了截面测量方法的可靠性。

关键词: D^0 - $\bar{D}^0$ 混合; 模型无关测量; 重子电磁形状因子; Belle 实验; Belle II 实验

ABSTRACT

The phenomenon of a neutral meson oscillating into its anti-particle is called the neutral meson mixing. This process plays an important role in the study of flavor physics. Among the mesons that mix, the D^0 meson is the only open flavor meson of the up type quark. A precise measurement of the D^0 - $\bar{D}^0$ mixing can serve as a probe to new physics beyond the standard model.

$D^0 \rightarrow K_s^0 \pi^+ \pi^-$ is the golden channel to measure the mixing parameter x . A model independent measurement for the D^0 - $\bar{D}^0$ mixing parameters x and y is performed using the data collected by Belle and Belle II experiment, with integrated luminosities of 943 fb^{-1} and 407 fb^{-1} , respectively. Approximately 2×10^6 D^0 mesons are reconstructed with the $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow c\bar{c} \rightarrow D^{*+} + X$, $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$, $D^0 \rightarrow K_s^0 \pi^+ \pi^-$ process. By a simultaneously fit to the decay-time and decay-time uncertainty distributions in 16 Dalitz-plot bins, the mixing parameters are measured to be $x = (3.6 \pm 1.7 \pm 0.4) \times 10^{-3}$ and $y = (3.5 \pm 1.4 \pm 0.3) \times 10^{-3}$. The first error is statistical and second is systematic. This is the most precise result in an electron-positron collider. This is also the first model independent measurement result in an electron-positron collider.

The study of strange baryons plays an important role in the understanding of strong interaction, strange quark and the neutron star. The electromagnetic form factors reveal the structure and dynamics of a strange baryon. Using a data sample of 980 fb^{-1} collected by Belle experiment, the $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ and $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ cross sections from the $\Sigma \bar{\Sigma}$ mass threshold to 3 GeV are measured. The $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ cross section in the $\sqrt{s} \in (2.4, 2.5)$ and $\sqrt{s} \in (2.5, 2.6)$ GeV regions are measured for the first time. The effective electromagnetic form factors are extracted. All the results are consistent with that of BESIII and BaBar. To validate the cross section measurements, the branching fractions of $J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ and $J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ are also measured. The results are consistent with world average values.

Key Words: D^0 - $\bar{D}^0$ mixing; model-independent measurement; baryon electromagnetic form factors; Belle experiment; Belle II experiment

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 物质的微观结构和标准模型	1
1.2 标准模型中的 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合	2
1.3 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的理论预测	5
1.4 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的实验现状	6
1.5 研究目的	7
第 2 章 Belle 和 Belle II 实验	8
2.1 Belle 实验	8
2.2 Belle II 实验	10
2.2.1 SuperKEKB 对撞机	10
2.2.2 Belle II 探测器	12
第 3 章 事例的重建与选择	19
3.1 数据样本	19
3.2 事例选择	19
3.3 本底的分类	21
3.4 信号事例的效率和分辨率	23
3.4.1 效率随达利兹图的变化趋势	23
3.4.2 达利兹图的分辨率	24
3.4.3 效率随衰变时间的变化趋势	27
3.4.4 衰变时间的分辨率	27
第 4 章 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的模型无关测量方法	31
4.1 模型依赖与模型无关测量方法	31
4.2 LHCb 实验使用的模型无关测量方法	33
4.3 本工作使用的模型无关测量方法	34
第 5 章 在达利兹图的不同区间内确定信号和本底事例数	38
5.1 信号与本底的参数化	38
5.2 Generic MC 样本拟合	39
5.3 实验数据拟合	42
第 6 章 含时拟合	45
6.1 Toy MC 样本拟合	46

6.2	实验数据拟合	49
6.3	系统误差	50
6.4	总结和讨论	55
第 7 章	Belle 实验上 Σ^+ 和 Σ^0 有效电磁形状因子的测量	57
7.1	研究动机	57
7.1.1	重子电磁形状因子	57
7.1.2	奇异重子电磁形状因子的研究现状	60
7.1.3	研究目的	61
7.2	初态辐射方法	61
7.3	数据样本	62
7.4	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$	64
7.4.1	事例重建与选择	64
7.4.2	本底分析	66
7.4.3	截面与形状因子的测量	70
7.4.4	系统误差	71
7.4.5	$J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 的分支比测量	73
7.5	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$	74
7.5.1	事例重建与选择	74
7.5.2	本底分析	77
7.5.3	截面与形状因子的测量	80
7.5.4	系统误差	81
7.5.5	$J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的分支比测量	83
7.6	总结和讨论	83
第 8 章	总结和展望	86
	参考文献	88
附录 A	DAFNE 含时达利兹图分析框架	103
A.1	研究动机	103
A.2	Hydra 框架	103
A.3	DAFNE 框架	104
A.3.1	三体衰变振幅	104
A.3.2	探测器响应	105
A.3.3	本底	106
A.3.4	配置文件接口	107

A.3.5	自动画图	109
A.3.6	相位差的计算	109
A.4	使用案例与性能测试	109
A.4.1	CLEO 的 $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ 衰变模型	109
A.4.2	BaBar 的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时衰变模型	110
A.5	总结	115
附录 B	D^0 - $\bar{D}^0$ 混合测量的补充材料	116
B.1	K_S^0 重建对效率的影响	116
B.2	最好候选者选择对达利兹图效率的影响	117
B.3	克隆径迹排除	118
B.4	重建错误的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 候选者的分布	119
B.5	达利兹图分辨率的附录	123
B.5.1	Belle II 相空间 MC 样本	123
B.5.2	Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本	128
B.5.3	Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本	133
B.5.4	Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本	138
B.6	不同达利兹图区间的 D^0 衰变时间和 σ_t 分布	143
B.6.1	不同达利兹图区间的信号 σ_t 分布和其他本底 σ_t 分布	143
B.6.2	不同达利兹图区间的 $\delta t/\sigma_t$ 分布	144
B.6.3	不同达利兹图区间其他本底候选者的 D^0 衰变时间分布	144
B.6.4	其他本底候选者在信号区间和 $M(D^0)$ 边带的 D^0 衰变时间分布和 σ_t 分布。	145
B.7	混合参数统计误差的研究	146
B.8	$M(D^0)$ - Q 拟合的附录	148
B.8.1	Generic MC 样本	148
B.8.2	实验数据	157
B.9	含时拟合的附录	166
B.9.1	Toy MC 样本	166
B.9.2	实验数据	175
附录 C	Σ^+ 和 Σ^0 有效电磁形状因子测量的补充材料	184
C.1	Trigger 效率的检查	184
C.1.1	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 过程的 trigger 效率检查	185
C.1.2	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 过程的 trigger 效率检查	188
C.2	$\Sigma \bar{\Sigma}$ 不变质量分辨率和偏差值的检查	189

C.3 束团对撞时间 (T_0) 误匹配的检查	190
附录 D ISR 分析的事例选择方法	196
附录 E 数学补充材料	198
E.1 螺旋度角	198
E.2 pdf' 的归一化	198
E.3 函数的定义	199
E.3.1 CB 函数	199
E.3.2 J_{S_U} 函数	200
E.4 非自共轭道的含时衰变振幅	200
致谢	202
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	204

插图清单

图 1.1	粒子物理标准模型。	1
图 1.2	D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的箱图。	3
图 1.3	D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的双企鹅图。	3
图 1.4	D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的强子中间态。	3
图 1.5	D^0 含时衰变示意图。	5
图 1.6	x , y , $ q/p $ 和 ϕ 的置信区间。	7
图 2.1	KEKB 对撞机示意图。	8
图 2.2	Belle 探测器结构图。	9
图 2.3	Belle 触发和数据获取系统示意图。	10
图 2.4	SuperKEKB 对撞机示意图。	12
图 2.5	Belle II Phase 3 积分亮度。	12
图 2.6	Belle II 探测器结构图。	13
图 2.7	Belle II PXD 探测器目前的安装情况。	14
图 2.8	Belle II 顶点探测器 (VXD) 示意图。	14
图 2.9	TOP 模块示意图和 TOP 探测器的性能。	15
图 2.10	ARICH 原理示意图。	16
图 2.11	ARICH 的介质和 HAPD。一个宇宙线 μ 子在 ARICH 中发出的切伦科夫光形成的环。	16
图 2.12	ARICH 的效率和误判率。	16
图 2.13	Belle II 硬件触发系统示意图。	17
图 2.14	Belle II 数据获取系统示意图。	18
图 3.1	相空间信号 MC 样本的 $dist$ 分布。	20
图 3.2	$M(D^0)$ 和 Q 的分布。	21
图 3.3	$M(D^0)$ 和 Q 在信号区间的分布。	22
图 3.4	Belle 和 Belle II 数据中的达利兹图。	22
图 3.5	Belle II 相空间 MC 样本中效率随达利兹图的变化趋势。	24
图 3.6	Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中效率随达利兹图的变化趋势。	24
图 3.7	Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中效率随达利兹图的变化趋势。	24

图 3.8	Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中效率随达利兹图的变化趋势。	24
图 3.9	Belle II 相空间 MC 样本中, 达利兹图 $(m_{\pi\pi}^2, \cos(\theta_{\pi\pi}))$ 的 10×10 个等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。	25
图 3.10	Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, 达利兹图 $(m_{\pi\pi}^2, \cos(\theta_{\pi\pi}))$ 的 10×10 个等分区间的 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 二维分布。	25
图 3.11	Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, 达利兹图 $(m_{\pi\pi}^2, \cos(\theta_{\pi\pi}))$ 的 10×10 个等分区间的 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 二维分布。	26
图 3.12	Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, 达利兹图 $(m_{\pi\pi}^2, \cos(\theta_{\pi\pi}))$ 的 10×10 个等分区间的 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 二维分布。	26
图 3.13	Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本的效率随 D^0 衰变时间的变化趋势。	27
图 3.14	Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本的 δt 分布。	28
图 3.15	Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本的 $\delta t/\sigma_t$ 分布。	28
图 3.16	Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本 $\delta t/\sigma_t$ 分布的均值随 D^0 衰变时间的变化趋势。	29
图 3.17	Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本 $\delta t/\sigma_t$ 分布的标准差随 D^0 衰变时间的变化趋势。	29
图 3.18	Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $\delta t/\sigma_t$ 的平均值随 σ_t 的变化趋势。	30
图 3.19	Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $\delta t/\sigma_t$ 的标准差随 σ_t 的变化趋势。	30
图 4.1	平均分区 (equal $\Delta\delta_D$ binning)。	32
图 5.1	Belle 和 Belle II generic MC $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	40
图 5.2	拟合得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 与 MC match 的对比 (Belle II MC15 generic MC)。	41
图 5.3	拟合得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 与 MC match 的对比 (Belle SVD1 $Y(4S)$ generic MC)。	41
图 5.4	拟合得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 与 MC match 的对比 (Belle SVD2 $Y(4S)$ generic MC)。	41
图 5.5	拟合得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 与 MC match 的对比 (Belle SVD2 $Y(5S)$ generic MC)。	42

图 5.6	Belle 和 Belle II 数据 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	43
图 5.7	拟合 Belle II 数据得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 。	43
图 5.8	拟合 Belle SVD1 $Y(4S)$ 数据得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 。	44
图 5.9	拟合 Belle SVD2 $Y(4S)$ 数据得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 。	44
图 5.10	拟合 Belle SVD2 $Y(5S)$ 数据得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 。	44
图 6.1	一个 Toy MC 样本的含时拟合结果。	47
图 6.2	Toy MC 的混合参数拟合值分布。	48
图 6.3	Belle 和 Belle II 实验数据联合含时拟合结果。	49
图 6.4	Belle 和 Belle II 数据混合参数拟合结果。	50
图 6.5	达利兹图效率系统误差研究中, Toy MC 样本的混合参数拟合值分布。	51
图 6.6	达利兹图分辨率系统误差研究中, Toy MC 样本的混合参数拟合值分布。	52
图 6.7	D^0 衰变时间分辨率系统误差研究中, Toy MC 样本的混合参数拟合值分布。	52
图 6.8	D^0 衰变时间分辨率系统误差研究中, 一个 Toy MC 样本的含时拟合结果。	53
图 6.9	本底系统误差研究中, Toy MC 样本的混合参数拟合值分布。	54
图 6.10	对 Belle II 实验 x 参数测量误差的估计。	56
图 7.1	f 通过光子与电子散射的树图阶费曼图。	57
图 7.2	DM2、BESIII、BaBar 实验的奇异重子类时有效形状因子测量结果。	60
图 7.3	Λ 类时形状因子和 pQCD 预言的对比。	61
图 7.4	初态辐射过程的树图阶费曼图。	62
图 7.5	$M_{\text{rec}}^2(\gamma\gamma\Lambda\bar{\Lambda})$ 的分布图。	65
图 7.6	通过事例选择的样本中, 用于重建 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 的 $\gamma\Lambda/\gamma\bar{\Lambda}$ 的不变质量。	65
图 7.7	实验数据中 $M(\gamma\Lambda)$ 和 $M(\gamma\bar{\Lambda})$ 的二维分布。	66
图 7.8	实验数据的 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 不变质量谱。	67
图 7.9	$e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ MC 样本中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图和实验数据中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 分布。	68
图 7.10	$e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\eta$ MC 样本中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图和实验数据中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 分布。	69
图 7.11	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ MC 样本和实验数据中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图。	69

图 7.12	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \eta$ MC 样本和实验数据中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图。	69
图 7.13	由信号 MC 得到的 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 重建效率随 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 不变质量的变化趋势。	70
图 7.14	$e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 截面。	71
图 7.15	实验数据中 J/ψ 峰附近的 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 不变质量谱。	74
图 7.16	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ MC 中正确重建的 π^0 的 $M(\gamma\gamma)$ 分布图。	75
图 7.17	$M_{\text{rec}}^2(p\pi^0 \bar{p}\pi^0)$ 和 $\theta(\vec{p}_{\text{c.m.}}(\gamma_{\text{ISR}}), \vec{p}_{\text{c.m.}}(p\pi^0 \bar{p}\pi^0))$ 分布。	76
图 7.18	通过事例筛选的样本中, 用于重建 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的 $p\pi^0 / \bar{p}\pi^0$ 不变质量谱。	76
图 7.19	实验数据的 $M(p\pi^0)$ 和 $M(\bar{p}\pi^0)$ 二维分布。	77
图 7.20	实验数据中的 $M_{\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-}$ 谱。	77
图 7.21	$e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^- \pi^0$ MC 样本中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图和实验数据中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 分布。	79
图 7.22	$e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^- \eta$ MC 样本中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图和实验数据中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 分布。	79
图 7.23	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^- \pi^0$ MC 样本和实验数据中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图。	79
图 7.24	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^- \eta$ MC 样本和实验数据中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图。	80
图 7.25	由信号 MC 得到的 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 重建效率随 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 不变质量的变化趋势。	80
图 7.26	$e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 截面。	81
图 7.27	实验数据中 J/ψ 峰附近的 $M_{\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-}$ 谱。	83
图 7.28	Σ^+ 和 Σ^0 的有效形状因子。	84
图 A.1	Isobar 模型的示意图。	104
图 A.2	示例配置文件的达利兹图效率和分辨率。	108
图 A.3	DAFNE 基于 CLEO 模型产生的 $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ MC 样本的分布。	110
图 A.4	DAFNE 基于 CLEO 模型产生的 $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ MC 样本的达利兹图。	110
图 A.5	DAFNE 和 cfit 样本的一维分布对比。	111
图 A.6	DAFNE 和 cfit 样本的达利兹图对比。	111
图 A.7	DAFNE 和 cfit 计算的相位差的对比。	111
图 A.8	$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 不含时达利兹图拟合结果。	112
图 A.9	$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时达利兹图拟合结果。	114

图 B.1	D^{*+} 候选者数随 K_S^0 飞行距离的变化。	116
图 B.2	K_S^0 效率修正后, D^{*+} 重建效率随达利兹图和 D^0 衰变时间的变化趋势。	116
图 B.3	使用随机最好候选者选择后的达利兹图效率。	117
图 B.4	本底的达利兹图。	118
图 B.5	效率随 $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 的变化。	118
图 B.6	$N(N_C)$ 和 $N'(N'_C)$ 的计算。	119
图 B.7	+3 达利兹图区间的 $M(D^0)$ 和 Q 分布。	120
图 B.8	达利兹图区间 $+i(\pi)$ 和 $-i(mi)$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 的 Q 信号区 $M(D^0)$ 分布。	120
图 B.9	达利兹图区间 $+i(\pi)$ 和 $-i(mi)$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 的 $M(D^0)$ 信号区 Q 分布。	121
图 B.10	信号替换候选者的产生方法: 替换完全正确重建的 D^0 候选者的 K_S^0 , π^+ 或 π^- 。	121
图 B.11	$+i$ 区间不完全正确重建的信号候选者和信号替换候选者的分布对比。	122
图 B.12	$-i$ 区间不完全正确重建的信号候选者和信号替换候选者的分布对比。	123
图 B.13	Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。	124
图 B.14	Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。	125
图 B.15	Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。	126
图 B.16	Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。	127
图 B.17	Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。	129

- 图 B.18 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 130
- 图 B.19 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 131
- 图 B.20 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 132
- 图 B.21 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 134
- 图 B.22 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 135
- 图 B.23 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 136
- 图 B.24 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 137
- 图 B.25 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 139
- 图 B.26 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 140
- 图 B.27 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 141
- 图 B.28 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。 ··· 142
- 图 B.29 相空间信号 MC 中信号候选者的 σ_t 分布。 ··· 143
- 图 B.30 Generic MC 中其他本底候选者的 σ_t 分布。 ··· 143

图 B.31	相空间信号 MC 中信号候选者的 $\delta t/\sigma_t$ 分布。	144
图 B.32	Generic MC 中其他本底候选者的 D^0 衰变时间分布。	144
图 B.33	Generic MC 中不同达利兹图区间的其他本底候选者在信号区间和 $M(D^0)$ 边带的 D^0 衰变时间分布。	145
图 B.34	Generic MC 中不同达利兹图区间的其他本底候选者在信号区间和 $M(D^0)$ 边带的 σ_t 分布。	146
图 B.35	Belle II MC15 generic MC 样本 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	149
图 B.36	Belle II MC15 generic MC 样本 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	150
图 B.37	Belle SVD1 $Y(4S)$ generic MC 样本 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	151
图 B.38	Belle SVD1 $Y(4S)$ generic MC 样本 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	152
图 B.39	Belle SVD2 $Y(4S)$ generic MC 样本 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	153
图 B.40	Belle SVD2 $Y(4S)$ generic MC 样本 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	154
图 B.41	Belle SVD2 $Y(5S)$ generic MC 样本 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	155
图 B.42	Belle SVD2 $Y(5S)$ generic MC 样本 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	156
图 B.43	Belle II 数据 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	158
图 B.44	Belle II 数据 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	159
图 B.45	Belle SVD1 $Y(4S)$ 数据 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	160
图 B.46	Belle SVD1 $Y(4S)$ 数据 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	161
图 B.47	Belle SVD2 $Y(4S)$ 数据 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	162
图 B.48	Belle SVD2 $Y(4S)$ 数据 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	163
图 B.49	Belle SVD2 $Y(5S)$ 数据 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	164
图 B.50	Belle SVD2 $Y(5S)$ 数据 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。	165
图 B.51	Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle II, D^0 部分)。	167
图 B.52	Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle II, $\bar{D}^0$ 部分)。	168
图 B.53	Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD1 $Y(4S)$, D^0 部分)。	169
图 B.54	Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD1 $Y(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。	170
图 B.55	Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(4S)$, D^0 部分)。	171

图 B.56	Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。	172
图 B.57	Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(5S)$, D^0 部分)。	173
图 B.58	Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(5S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。	174
图 B.59	Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle II, D^0 部分)。	176
图 B.60	Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle II, $\bar{D}^0$ 部分)。	177
图 B.61	Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle SVD1 $Y(4S)$, D^0 部分)。	178
图 B.62	Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle SVD1 $Y(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。	179
图 B.63	Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(4S)$, D^0 部分)。	180
图 B.64	Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。	181
图 B.65	Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(5S)$, D^0 部分)。	182
图 B.66	Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(5S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。	183
图 C.1	信号 MC 中的 $\delta M(\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0)$ 分布和其轮廓图。	189
图 C.2	信号 MC 中的 $\delta M(\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-)$ 分布和其轮廓图。	189
图 C.3	信号 MC 中的 $\delta M_{\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0}$ 分布和其轮廓图。	190
图 C.4	信号 MC 中的 $\delta M_{\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-}$ 分布和其轮廓图。	190
图 C.5	实验数据中 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 共振峰的拟合结果。	191
图 C.6	实验数据中 $J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 共振峰的拟合结果。	191
图 C.7	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 样本中 $T_{measured} - T_{expected}$ 随 (反) 质子动量的变化趋势。	192
图 C.8	放宽选择条件后, $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 样本中 $T_{measured} - T_{expected}$ 随 (反) 质子动量的变化趋势。	193
图 C.9	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 信号 MC 中质子与反质子动量的二维分布图。	193
图 C.10	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 样本中 $T_{measured} - T_{expected}$ 随 (反) 质子动量的变化趋势。	194
图 C.11	放宽选择条件后, $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 样本中 $T_{measured} - T_{expected}$ 随 (反) 质子动量的变化趋势。	194
图 C.12	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 信号 MC 中质子与反质子动量的二维分布图。	195

表 格 清 单

表 1.1	x , y , $ q/p $ 和 ϕ 的联合拟合结果。	6
表 1.2	基于 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 样本的 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合参数测量工作。	7
表 2.1	KEKB 和 SuperKEKB 的参数对比。	11
表 5.1	各数据集的信号事例数和平均纯度。	42
表 6.1	单独拟合不同数据集的结果及其统计平均值。	50
表 6.2	混合参数测量的系统误差。	54
表 6.3	本工作的结果与 BaBar、Belle 和 LHCb 最好结果的对比。	55
表 7.1	$Y(nS)$ ($n = 1, 2, \dots, 5$) 共振峰及附近能区数据的积分亮度 ($\mathcal{L}$)。	62
表 7.2	本文用到的 MC 样本。	63
表 7.3	含有两个正确重建的 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 的本底事例 (第三类本底) 对信号过程的本底贡献。	67
表 7.4	$e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 截面和有效形状因子。	71
表 7.5	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 截面测量的系统误差。	73
表 7.6	含有两个正确重建的 $\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 的本底事例 (第三类本底) 对信号过程的本底贡献。	78
表 7.7	$e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 截面和有效形状因子。	81
表 7.8	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 截面测量的系统误差。	82
表 A.1	达利兹图分析框架的对比。	103
表 A.2	DAFNE 计算的占比和 CLEO 测量结果的对比。	110
表 A.3	DAFNE 计算的平均分区的概率的比值 (r_b) 和相位差 (c_b, s_b)。	112
表 A.4	$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 不含时拟合中, 振幅参数的拟合结果与输入值的对比。	113
表 A.5	$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时拟合结果与输入值的对比。	114
表 A.6	耗时对比。	114
表 B.1	拟合 Belle SVD2 和 Belle II Toy MC 得到的 x 参数统计误差。	147
表 B.2	拟合 Belle SVD2 和 Belle II Toy MC 得到的 y 参数统计误差。	147
表 B.3	对 BaBar, Belle SVD2 和 Belle II Toy MC 进行含时达利兹图分析得到的混合参数统计误差。	148

表 C.1	Trigger bit 的定义。	186
表 C.2	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 过程控制样本的 trigger 效率。	188
表 C.3	$e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 过程控制样本的 trigger 效率。	189

第1章 绪 论

1.1 物质的微观结构和标准模型

物质的本原是什么？从古至今，许多智者从不同角度讨论这个问题。通过探究物质结构来讨论物质本原的学说，称为原子论^[1]。原子论由古希腊的留基伯 (Leucippus) 和德谟克里特 (Democritus) 等在公元前约 400 年提出。他们主张，世界由无限的虚空和无穷多的原子组成，宏观现象可由原子的运动解释^[1-2]。1803 年，道尔顿 (John Dalton) 指出不同化学元素本质上是不同的原子，这些原子不可分割，不可被创造或毁灭^[1]。1897 到 1932 年，电子、质子、中子被先后发现。人们认为这三者是组成物质的基本粒子^[3]。1932 到 2012 年，各类轻子、介子、超子和规范玻色子，先后在实验中被发现。描述这些粒子的理论不断发展^[1,3]，形成粒子物理的标准模型。

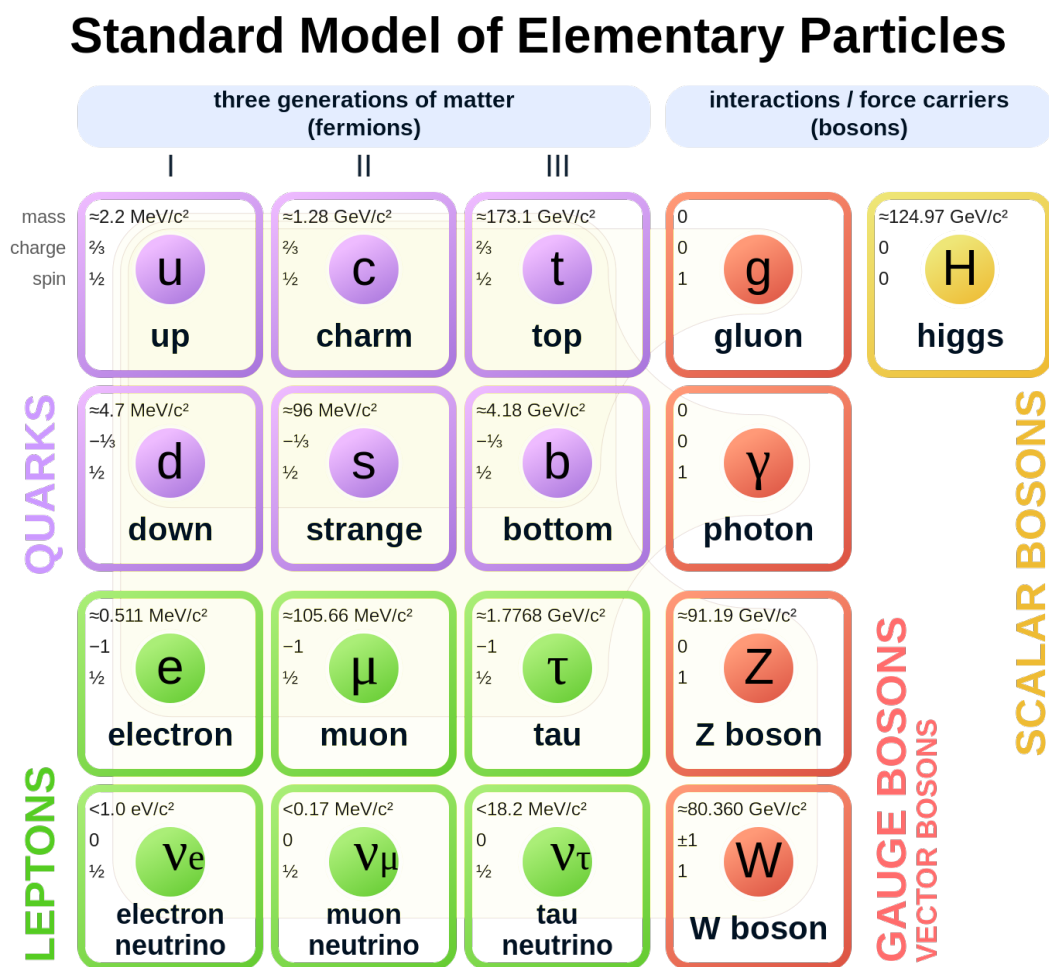


图 1.1 粒子物理标准模型^[4]。

标准模型 (图 1.1) 成功描述了组成物质的基本粒子和它们之间的电磁、弱和

强相互作用^[5]。物质由六种夸克：上夸克 (u)、粲夸克 (c)、顶夸克 (t)、下夸克 (d)、奇异夸克 (s)、底夸克 (b)，六种轻子：电子 (e)、缪子 (μ)、陶子 (τ)、电子中微子 (ν_e)、缪子中微子 (ν_μ)、陶子中微子 (ν_τ)，及其反粒子组成。相互作用由规范玻色子传递：光子 (γ) 传递电磁相互作用， $W^\pm$ 玻色子和 Z 玻色子传递弱相互作用，胶子 (g) 传递强相互作用。希格斯玻色子 (H) 通过希格斯机制 (Higgs mechanism) 赋予 $W^\pm$, Z 质量，通过汤川耦合 (Yukawa coupling) 赋予夸克和带电轻子质量。希格斯粒子还耦合了不同代的夸克，导致不同代夸克之间的混合^[6-8]。

虽然标准模型是目前最成功的基本粒子模型，但仍存在许多问题。比如，标准模型中有 19 个参数需要由实验提供，无法由第一性原理得到；标准模型不包含中微子的质量；标准模型不包含引力；标准模型无法解释暗物质和暗能量；由标准模型得出的 CP 破坏过小，无法解释宇宙中的正反物质不对称。为加深对微观物质世界的理解，更进一步的探索是必要的。

在味物理实验中精确检验标准模型、寻找超出标准模型的迹象是重要的探索方向，此类实验研究粒子味道的改变。中性介子混合过程 $K^0(\bar{s}d) \Leftrightarrow \bar{K}^0(s\bar{d})$ 、 $B^0(\bar{b}d) \Leftrightarrow \bar{B}^0(b\bar{d})$ 、 $B_s^0(\bar{b}s) \Leftrightarrow \bar{B}_s^0(b\bar{s})$ 和 $D^0(\bar{c}u) \Leftrightarrow \bar{D}^0(c\bar{u})$ 的味道改变量为 2，是重要的味物理研究对象。其中 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合是唯一一个上型夸克开味介子的混合^①。以下对其理论背景和研究现状做简要介绍。

1.2 标准模型中的 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合

标准模型中，左手夸克的质量本征态与 $W^\pm$ 玻色子相互作用的拉格朗日量为^[9]

$$\mathcal{L} = \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \left[W_\mu^+ \bar{u}_L^i \gamma^\mu (V)^{ij} d_L^j + W_\mu^- \bar{d}_L^i \gamma^\mu (V^\dagger)^{ij} u_L^j \right] . \quad (1.1)$$

其中， $W_\mu^\pm$ 为 $W^\pm$ 玻色子。 $u_L^i = \{u_L, c_L, t_L\}$ 为左手上型夸克的质量本征态， $d_L^i = \{d_L, s_L, b_L\}$ 为左手下型夸克的质量本征态， e 为单位电荷， θ_w 为弱混合角。

$$V = \begin{pmatrix} V_{ub} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

为 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵，描述夸克味道混合。实验测量的 CKM 矩阵元绝对值如下^[10]

$$\begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97435 \pm 0.00016 & 0.22500 \pm 0.00067 & 0.00369 \pm 0.00011 \\ 0.22486 \pm 0.00067 & 0.97349 \pm 0.00016 & 0.04182^{+0.00085}_{-0.00074} \\ 0.00857^{+0.00020}_{-0.00018} & 0.04110^{+0.00083}_{-0.00072} & 0.999118^{+0.000031}_{-0.000036} \end{pmatrix}$$

^① D^0 介子也是这四个介子中唯一一个，假设 CP 守恒时， CP 偶态质量大于 CP 奇态的介子。

$D^0(c\bar{u})$ 介子通过与 $W^\pm$ 玻色子的相互作用振荡到 $\bar{D}^0(\bar{c}u)$ 介子的现象称为 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合。 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合对应的箱图、双企鹅图、强子中间态过程^[11-12]如图 1.2-1.4所示.

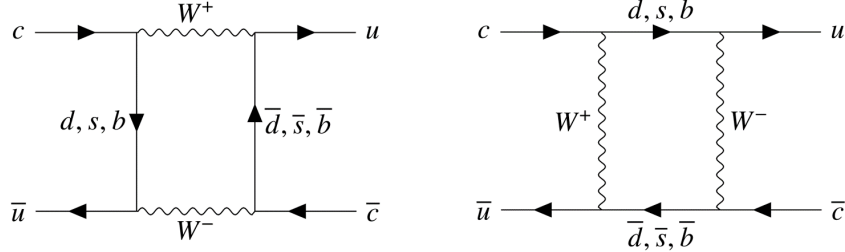


图 1.2 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的箱图。

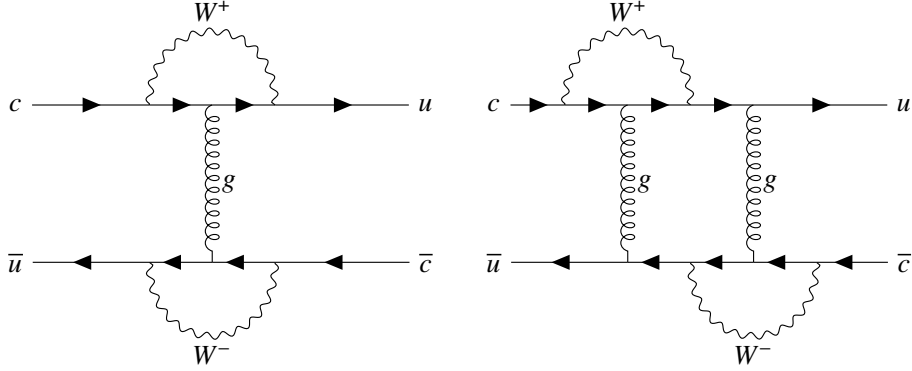


图 1.3 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的双企鹅图。

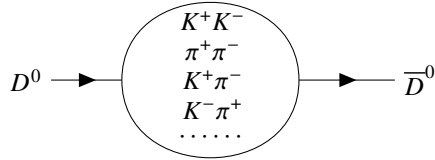


图 1.4 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的强子中间态。

时刻 t 的 D^0 介子态，可由味道本征态 $|D^0\rangle$ 和 $|\bar{D}^0\rangle$ 构造

$$\psi(t) = a(t)|D^0\rangle + b(t)|\bar{D}^0\rangle \quad (1.3)$$

$\psi(t)$ 满足^[8,13-14]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = (M - \frac{i}{2}\Gamma) \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

其中

$$M_{\xi\eta} = m\delta_{\xi\eta} + \langle \xi | H_w | \eta \rangle + \mathcal{P} \sum_k \frac{\langle \xi | H_w | k \rangle \langle k | H_w | \eta \rangle}{E_k - m}, \quad (1.5)$$

$$\Gamma_{\xi\eta} = 2\pi \langle \xi | H_w | k \rangle \langle k | H_w | \eta \rangle \delta(E_k - m). \quad (1.6)$$

m 为一个参数^①, H_w 为弱相互作用的哈密顿量^②, $\mathcal{P}$ 为取主值运算。 k 为中间态, 其能量为 E_k 。

$|D^0\rangle$ 和 $|\bar{D}^0\rangle$ 不是质量本征态。定义 D^0 介子质量本征态^③

$$\begin{aligned} |D_1\rangle &= p|D^0\rangle + q|\bar{D}^0\rangle, \\ |D_2\rangle &= p|D^0\rangle - q|\bar{D}^0\rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中, p 和 q 满足 $|p|^2 + |q|^2 = 1$ 。用质量本征态的质量差和宽度差定义混合参数

$$x = \frac{m_1 - m_2}{\Gamma}, \quad y = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2\Gamma}. \quad (1.8)$$

$m_{1,2}$ 和 $\Gamma_{1,2}$ 为 $D_{1,2}$ 的质量和宽度, $\Gamma = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$ 为平均宽度。理论上, x 和 y 参数可由 M_{12} 和 Γ_{12} (式 1.5-1.6) 计算得到。实验上, x 和 y 参数可通过测量 D^0 含时衰变率获得。

D^0 和 $\bar{D}^0$ 的时间演化方程为

$$\begin{aligned} |D^0(t)\rangle &= \frac{1}{2p} [|D_1(t)\rangle + |D_2(t)\rangle] \\ &= \frac{1}{2p} [e^{-im_1t - \Gamma_1 t/2} |D_1(0)\rangle + e^{-im_2t - \Gamma_2 t/2} |D_2(0)\rangle], \\ |\bar{D}^0(t)\rangle &= \frac{1}{2q} [|D_1(t)\rangle - |D_2(t)\rangle] \\ &= \frac{1}{2q} [e^{-im_1t - \Gamma_1 t/2} |D_1(0)\rangle - e^{-im_2t - \Gamma_2 t/2} |D_2(0)\rangle]. \end{aligned}$$

其中 $|D_{1,2}(0)\rangle = |D_{1,2}\rangle$ 。令 $g_{\pm}(t) = \theta(t)e^{-imt}e^{-\Gamma t/2} \frac{\cosh(z\Gamma t/2)}{\sinh(z\Gamma t/2)}$, $m = (m_1 + m_2)/2$, $z = -(y + ix)$, 有

$$|D^0(t)\rangle = g_+(t)|D^0\rangle + \frac{q}{p}g_-(t)|\bar{D}^0\rangle, \quad (1.9)$$

$$|\bar{D}^0(t)\rangle = g_+(t)|\bar{D}^0\rangle + \frac{p}{q}g_-(t)|D^0\rangle. \quad (1.10)$$

定义

$$A_f = \langle f | H | D^0 \rangle,$$

$$\bar{A}_f = \langle f | H | \bar{D}^0 \rangle,$$

^① m 为文献^[13]做近似和展开时引入的参数, 物理意义类似 D^0 介子的质量。

^② 强相互作用和电磁相互作用无法改变粲数 (粲数 = 粲夸克数 - 反粲夸克数)。这两种相互作用体现在 $m\delta_{\xi\eta}$ 项中。

^③ 本文使用文献^[10]中的约定。 $CP|D^0\rangle = +|\bar{D}^0\rangle$ 。 CP 守恒时, $D_1(D_2)$ 的 CP 宇称为偶 (奇)。

则 $D^0 \rightarrow f$ 的含时衰变振幅为

$$T_f(t) = A_f g_+(t) + \frac{q}{p} \bar{A}_f g_-(t) \quad (1.11)$$

式 1.11 的物理含义为, D^0 介子可以直接衰变到末态 f , 也可以先振荡成 $\bar{D}^0$, 再由 $\bar{D}^0$ 衰变到 f , 如图 1.5 所示。

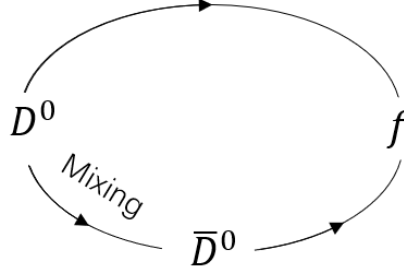


图 1.5 D^0 含时衰变示意图。

在 D^0 介子系统中, 可测量三类 CP 破坏: (1) 直接 CP 破坏, 即 D^0 衰变到末态 f 的振幅和 $\bar{D}^0$ 衰变到电荷共轭态 $\bar{f}$ 的振幅不同, $A_f/\bar{A}_{\bar{f}} \neq 1$; (2) 混合中的 CP 破坏, 即 D^0 振荡到 $\bar{D}^0$ 的振幅和 $\bar{D}^0$ 振荡到 D^0 的振幅不同。这等价于味道本征态 $|D^0\rangle$ 中质量本征态 $|D_{1,2}\rangle$ 的系数不同, $q/p \neq 1$ 。 q/p 为复数, $|q/p| \neq 1$ 或 $\phi = \text{Arg}(q/p) \neq 0$ 都代表 CP 破坏; (3) D^0 衰变和 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的干涉中的 CP 破坏, $\frac{q}{p} \frac{\bar{A}_f}{A_f} \neq 1$ 。

1.3 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的理论预测

对 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合参数的理论预测, 可通过三种方法: 单举方法、遍举方法和色散关系^[15]。

单举方法指在夸克层次计算。用到的方法为重夸克展开 (heavy quark expansion, HQE)。在 HQE 计算中, 对 GIM 抵消 (Glashow-Iliopoulos-Maiani cancellation) 采用不同的处理, 可导致计算得到的 y 参数 (式 1.8) 相差 10 个量级。对 $s\bar{s}$, $d\bar{d}$, $s\bar{d}(d\bar{s})$ 采用不同的重整化标度, 就有可能得到与实验接近的 y 参数^[16]。

遍举方法指在强子层次计算, 即在式 1.5-1.6 中对所有可能的强子态求和。第一性原理的计算涉及到非微扰 QCD, 故此类工作在计算时会进行简化, 如仅考虑 $SU(3)$ 破缺造成的相空间效应而在矩阵元中不考虑 $SU(3)$ 破缺, 或使用分支比的实验测量值作为输入等。用遍举方法可得到和实验相近的 y 参数, 文献^[17]用遍举方法算出 $y = (0.21 \pm 0.07)\%$, 与实验测量值 $y = (0.645^{+0.024}_{-0.023})\%$ ^[18] 接近。

色散关系方法, 即通过 $H = M - \frac{i}{2}\Gamma$ 的色散关系, 得出 H 的实部 M 和虚部 Γ 之间的关系, 进而得到 x 和 y 的关系。直接计算 x 非常困难^[15], 可根据色散关系用 y 计算 x 。文献^[19]用色散关系得出 x 的量级为 $10^{-3} \sim 10^{-2}$, x 的实验测

量值为 $(0.407 \pm 0.044)\%$ ^[18]。色散关系还可用于预测第二类 CP 破坏的大小。文献^[20]用色散关系得到 $|q/p| - 1 \approx 2 \times 10^{-4}$ 和 $\phi \approx 6 \times 10^{-3}^\circ$ 。目前的实验测量值为 $|q/p| = 0.994^{+0.016}_{-0.015}$ 和 $\phi = -2.6 \pm 1.1^\circ$ ^[20]。

此外，文献^[21-22]讨论了新物理对赝数改变量为 2 的算符的贡献。文献^[23-25]讨论了新物理对 x 和 y 以及 q/p 的贡献。文献^[26]指出如果 x 和 y 参数大于 $O(10^{-2})$ 则需考虑新物理的贡献。目前的实验测量值小于 1×10^{-2} 。

1.4 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的实验现状

D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的首次观测由费米实验室^[27]在 1988 年完成。在之后的 20 年里^[28]，费米实验室、ALEPH 合作组、CLEO 合作组、BaBar 合作组、Belle 合作组、FOCUS 合作组、CDF 合作组都尝试测量，受到统计量的限制都未发现 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合。

2007 年，Belle^[29]实验和 BaBar^[28]实验分别以超过 3 倍 σ 的显著性排除不存在 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的可能性。2007-2009 年，HFLAV 通过联合拟合多个实验结果^[15,30-31]，以超过 5 倍 σ 的显著性排除 $x^2 + y^2$ 和 y 为零，确认 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的存在。2013 年，LHCb 合作组^[32]通过拟合 $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$ 和 $D^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ 的含时衰变概率之比，以 9.1 倍 σ 的显著度排除 $x^2 + y^2$ 为零的可能性，首次在单个实验中发现 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合。随后，Belle 合作组^[33]和 CDF 合作组^[34]分别以 5.1σ 和 6.1σ 的显著度确认 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合存在。2021 年，LHCb^[35]通过分析 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时衰变概率，以超过 5 倍 σ 的显著度首次确认 x 参数非零。

最新的 x ， y ， $|q/p|$ 和 ϕ 联合拟合结果^[18]如表 1.1 所示。对应的置信区间如图 1.6 所示。

表 1.1 x ， y ， $|q/p|$ 和 ϕ 的联合拟合结果^[18]。

表中假设 CP 守恒的拟合结果未加入 LHCb(2021) 年的测量结果，允许 CP 破坏的拟合结果加入了 LHCb(2021) 年的测量结果，故精度明显不同。

参数	假设 CP 守恒	允许 CP 破坏
$x [10^{-3}]$	$4.34^{+1.26}_{-1.39}$	4.07 ± 0.44
$y [10^{-3}]$	6.46 ± 0.24	$6.45^{+0.24}_{-0.23}$
$ q/p $	-	$0.994^{+0.016}_{-0.015}$
$\phi [^\circ]$	-	$-2.6^{+1.1}_{-1.2}$

$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 是直接测量 x ， y ， $|q/p|$ 和 ϕ 的理想场所。这是一个分支比较大 ($\mathcal{B}(D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-) = (2.8 \pm 0.18)\%$ ^[10]) 的 D^0 三体衰变过程。 A_f 和 $\bar{A}_f$ 的强相角差随达利兹图变化，某些达利兹区域的事例对混合参数有很高的敏感度。CLEO、Belle、BaBar、LHCb 都用 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 样本测量过混合参数，如表 1.2 所

示。最近, LHCb^[35] 基于 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 样本测得了目前最精确的 x 和 $|q/p|$ 。精度远远高于过去所有实验。

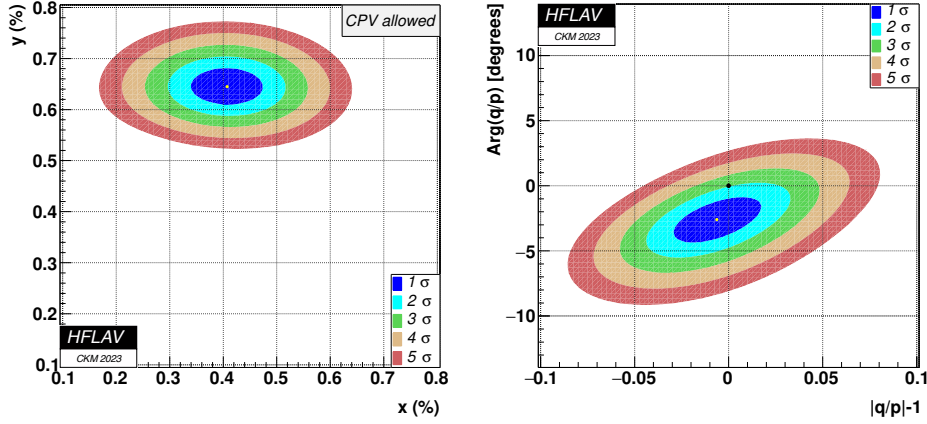


图 1.6 x , y , $|q/p|$ 和 ϕ 的置信区间。

表 1.2 基于 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 样本的 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合参数测量工作。

CLEO、Belle 和 BaBar 的结果第一项误差为统计误差, 第二项为系统误差, 第三项为模型误差。LHCb(2016) 使用模型无关方法测量, 其结果第一项误差为统计误差, 第二项为系统误差。LHCb(2019) 和 LHCb(2021) 用模型无关方法测量 x_{CP} , y_{CP} , Δx 和 Δy 后, 用此作为输入值通过拟合得到 x , y , $|q/p|$ 和 ϕ , 最终只给出总误差。LHCb(2023) 用模型无关方法测量 x_{CP} , y_{CP} , Δx 和 Δy , 未给出 x , y , $|q/p|$ 和 ϕ 。表中取 x_{CP} , y_{CP} 为其 x , y 值, 第一项误差为统计误差, 第二项为系统误差。CLEO 的 $|q/p|$ 结果根据 $\epsilon = (1 - |q/p|)/(1 + |q/p|)$ 测量值得出。BaBar 同时分析了 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 和 $D^0 \rightarrow K_S^0 K^+ K^-$ 样本 (后者事例数约为前者的十分之一), 其信号事例数为两个样本之和。表中, 除 LHCb(2023) 使用 $\bar{B} \rightarrow D^0 \mu^- \bar{\nu}_\mu X$ 样本外, 其余分析使用 $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$ 样本。

实验组 (年份)	积分亮度	信号事例数	x [10^{-3}]	y [10^{-3}]	$ q/p $	ϕ [$^\circ$]
CLEO(2005) ^[36-37]	9.0 fb^{-1}	5299	$23^{+35}_{-34} \pm 4 \pm 4$	$-15^{+25}_{-24} \pm 8 \pm 4$	$1.0 \pm 1.4 \pm 0.8 \pm 0.4$	$5.7 \pm 2.8 \pm 0.4 \pm 1.2$
Belle(2007) ^[38]	540 fb^{-1}	0.53×10^6	$8.1 \pm 3.0^{+1.0+0.9}_{-0.7-1.6}$	$3.7 \pm 2.5^{+0.7+0.7}_{-1.3-0.8}$	$0.86^{+0.30+0.06}_{-0.29-0.03} \pm 0.08$	$-14^{+16+5+2}_{-18-3-4}$
BaBar(2010) ^[39]	468.5 fb^{-1}	0.84×10^6	$1.6 \pm 2.3 \pm 1.2 \pm 0.8$	$5.7 \pm 2.0 \pm 1.3 \pm 0.7$	-	-
Belle(2014) ^[40]	921 fb^{-1}	1.23×10^6	$5.6 \pm 1.9^{+0.3+0.6}_{-0.9-0.9}$	$3.0 \pm 1.5^{+0.4+0.3}_{-0.5-0.6}$	$0.90^{+0.16+0.05+0.06}_{-0.15-0.04-0.05}$	$-6 \pm 11 \pm 3^{+3}_{-4}$
LHCb(2016) ^[41]	1.0 fb^{-1}	0.17×10^6	$-8.6 \pm 5.3 \pm 1.7$	$0.3 \pm 4.6 \pm 1.3$	-	-
LHCb(2019) ^[42]	3 fb^{-1}	2.3×10^6	$2.7^{1.7}_{1.5}$	7.4 ± 3.7	$1.05^{+0.22}_{-0.17}$	$5.2^{+6.3}_{-9.2}$
LHCb(2021) ^[43]	5.4 fb^{-1}	30.6×10^6	$3.98^{+0.56}_{-0.54}$	$4.6^{+1.5}_{-1.4}$	0.996 ± 0.052	$3.2^{+2.7}_{-2.9}$
LHCb(2023) ^[44]	5.4 fb^{-1}	3.72×10^6	$4.29 \pm 1.48 \pm 0.26$	$12.61 \pm 3.21 \pm 0.83$	-	-

1.5 研究目的

本文根据 Belle 实验采集的 943 fb^{-1} 数据和 Belle II 实验采集的 407 fb^{-1} 数据, 使用模型无关方法测量假设 CP 守恒时的 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合参数。使用的样本为 $e^+ e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow c \bar{c} \rightarrow D^{*+} + X$, $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$, $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 样本, 总信号事例数约为 2×10^6 。样本中 D^0 的味道用来自 D^{*+} 的 π^+ 标记。

第2章 Belle 和 Belle II 实验

2.1 Belle 实验

Belle 实验位于日本茨城县筑波市的 KEK 实验室，在 1999 年至 2010 年间进行取数，总共采集约 1 ab^{-1} 的实验数据。

KEKB 是不对称正负电子对撞机(图 2.1)。电子束能量为 8 GeV，电流为 1.2 A，正电子束的能量为 3.5 GeV，电流为 1.6 A^①。KEKB 的质心系能量为 10.58 GeV，覆盖的能区包含 B 介子对的阈值和 $Y(nS)$ ($n = 1, 2, \dots, 5$) 共振峰。KEKB 对撞机的详细介绍可见文献^[45-46]。

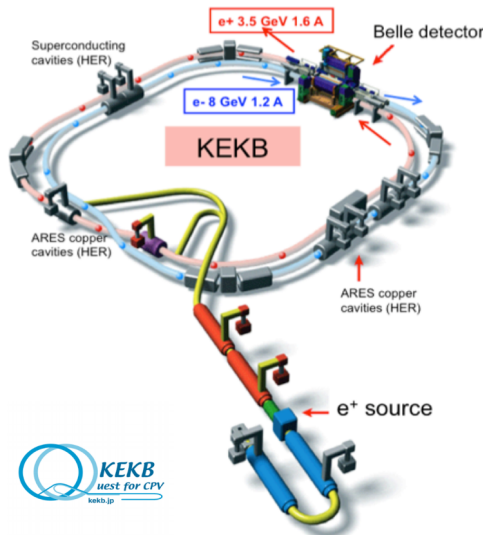


图 2.1 KEBB 对撞机示意图^[47]。

图中标出了正负电子束的能量和电流以及 Belle 探测器的位置。

Belle 探测器是一个大立体角的磁谱仪，其结构如图 2.2所示。Belle 探测器的详细介绍可见文献^[48-49]。

硅顶点探测器 (silicon vertex detector, SVD) 位于最内层。2003 年以前，SVD 由 3 层双边读出硅微条探测器 (double-sided silicon detector, DSSD)^[50]组成，称为 SVD1。2003 年后，Belle 使用了新的 SVD，由 4 层 DSSD 组成，称为 SVD2。

中心漂移室 (central drift chamber, CDC) 位于 SVD 外层。CDC 是一个 50 层的气体多丝室。填充气体为氦气 (50%) 和乙烷 (50%)。

气凝胶切伦科夫计数器 (aerogel threshold Cherenkov counters, ACC) 安装在 CDC 外围。桶部和前端盖均装有 ACC。ACC 使用硅气凝胶 (silica aerogel) 介质，其折射率随极角变化，范围在 1.01 到 1.03 之间。产生切伦科夫辐射的阈值速度 β 在 $1/1.01$ 到 $1/1.03$ 之间，对应的 $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ 在 7.2 到 4.3 之间。高速带电径迹在

^①电子束的储存环称为 HER(high-energy ring)，正电子束的储存环称为 LER(low-energy ring)。

气凝胶中产生的切伦科夫光由细网型光电倍增管 (fine mesh-type photomultiplier, FM-PMT)^[50] 探测^①。

飞行时间计数器系统 (time-of-flight scintillation counters, TOF) 安装在桶部 ACC 外侧。TOF 具有两层结构, 靠近对撞点的一层装有 64 个触发闪烁体计数器模块 (trigger scintillation counters, TSC), 外层装有 128 个飞行时间计数器模块 (TOF counters), 两层中间是厚度为 1.5 cm 的空气间隙^②。

电磁量能器 (electromagnetic calorimeter, ECL) 安装在 TOF 的外层。ECL 由 8736 块参杂铊的碘化铯 (CsI(Tl)) 晶体组成。晶体的长度约为 16 个辐射长度 ($16X_0$)。晶体的截面形状和长度随探测器的极角稍有变化。

上述子探测器位于一个 1.5 T 的超导线圈磁场内。 K_L^0 和缪子探测器 (K_L^0 and muon detector, KLM) 在超导线圈磁场外。KLM 由相间的电阻板计数器 (resistive plate counter, RPC) 和铁板构成。桶部装有 15 层 RPC, 前后端盖装有 14 层 RPC。铁板作为吸收体的同时, 也作为超导线圈的轭铁。

SVD 和 CDC 提供带电粒子的径迹和顶点信息。ACC 和 TOF 系统为粒子鉴别 (particle identification, PID) 提供信息。ECL 测量光子和电子的能量。KLM 用于探测 K_L^0 以及区分缪子和其它带电粒子。

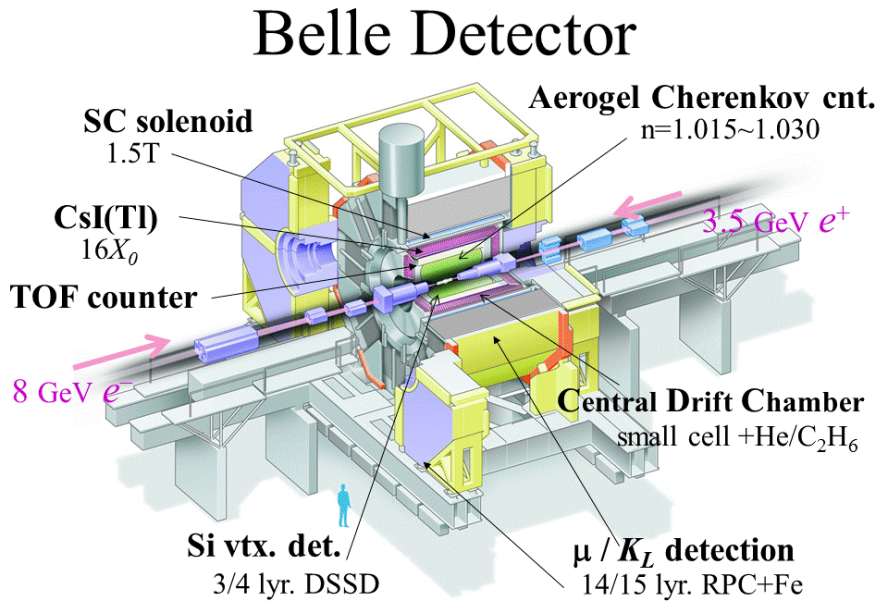


图 2.2 Belle 探测器结构图^[47]。

Belle 探测器的触发 (trigger) 和数据获取系统 (data acquisition, DAQ) 的示意图如图 2.3 所示。Belle 的触发系统由硬件触发 (Level-1)^[48] 和软件触发 (Level-3

^①FM-PMT 能在强磁场环境下正常工作。

^②这种设计可以有效压低束流产生的光子对于 TOF 系统的影响。KEK 对撞机的束流可以产生大量 MeV 量级的光子, 这些光子会在 TSC 层发生电子对效应, 变成正负电子对。而空气间隙会阻挡这些电子对的传播, 使其无法到达 TOF 计数器。

和 Level-4)^[48,51-52]组成。各子探测器根据击中产生子触发信号。这些信号由全局判断逻辑 (global decision logic, GDL) 组合成硬件触发的结果。通过硬件触发的事例由软件触发进一步筛选。后者主要根据快速径迹重建算法的结果筛选事例。数据获取系统对通过软件触发的事例进行完整的重建与保存。

Belle 的 DAQ^[48,53]由读出系统、事例组合器 (EFARM)、实时重建集群 (RFARM)、存储系统和控制系统组成。末态粒子在探测器中产生的信号由读出系统读取,除 SVD 的读出系统使用 ADC 外,其他子探测器的读出系统使用电荷时间转换电路和 TDC 读出信号。事例组合器将不同子探测器的数据组合成完整的 Belle 探测器物理事例。实时重建集群对事例进行完整的重建,转换成离线分析的数据格式,最终保存在存储系统。Belle DAQ 的最大事例率为 500 Hz。单个物理事例的大小约为 40 KB^[53]。

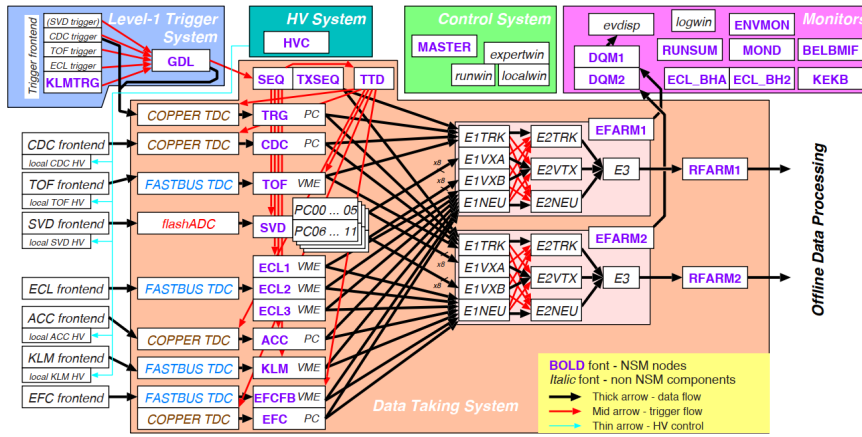


图 2.3 Belle 触发和数据获取系统示意图^[53]。

Belle 的离线数据分析软件框架为 BASF(Belle Analysis Framework)^[48,54]。BASF 提供一系列标准的模块,如动量重建模块、顶点重建模块和粒子鉴别模块等。用户通过调用这些模块以及自行编写的分析模块进行物理分析。模块间的数据传输由 PANTHER^[48]管理。

2.2 Belle II 实验

Belle II 实验沿用 Belle 实验的隧道和对撞实验厅,覆盖的能区与 Belle 相似,预期积分亮度为 50 ab^{-1} 。Belle II 实验于 2019 年 3 月正式开始取数,至今仍在进行。

2.2.1 SuperKEKB 对撞机

SuperKEKB(图 2.4),沿用了 KEKB 的隧道和部分器件,对磁铁、束流管、真空器件、控制系统和直线加速器等进行了升级^[55]。其质心系能量为 10.58 GeV ,覆盖

的能区包含 B 介子对的阈值和 $Y(nS)$ ($n = 1, 2, \dots, 5$) 共振峰。SuperKEKB 的电子束能量为 7 GeV, 电流为 2.6 A, 正电子束能量为 4 GeV, 电流为 3.6 A^①。SuperKEKB 的设计瞬时亮度为 $8 \times 10^{35} \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, 是 KEKB 的 40 倍^[56]。SuperKEKB 使用了纳米束 (nanobeam) 技术, 即令束团尺寸减小约 20 倍, 电流增大约两倍, 最终将使亮度提升 40 倍^[55]。目前 SuperKEKB 在实际运行中达到的最高瞬时亮度为 $4.71 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ^[56]。2016 年, SuperKEKB 进入第一运行阶段 (Phase 1)^[57], 完成了无对撞的测试运行。2018 年, SuperKEKB 进入第二运行阶段 (Phase 2), 完成了首次正负电子对撞测试, 收集了约 0.5 fb^{-1} 的数据。在这个阶段, 硅像素探测器仅安装了约十分之一。2019 年 3 月至今, 称为 SuperKEKB 的第三运行阶段 (Phase 3)。这个阶段开始正式物理取数^②。目前, Phase 3 已经收集了 427.79 fb^{-1} 的数据 (图 2.5)。2018 年至 2020 年, SuperKEKB 没有使用蟹形腰 (crab waist) 对撞技术。2020 年 4 月, SuperKEKB 开始使用 FCC-ee 的蟹形腰对撞技术^[58]。蟹形腰技术使得 SuperKEKB 的瞬时亮度小幅度提升, 束团的稳定性大幅提升, 最终使 SuperKEKB 每周的积分亮度大幅提升 (图 2.5)^[56]。SuperKEKB 和 KEKB 的参数对比见表 2.1。SuperKEKB 的详细介绍见文献^[55-56,59-61]。

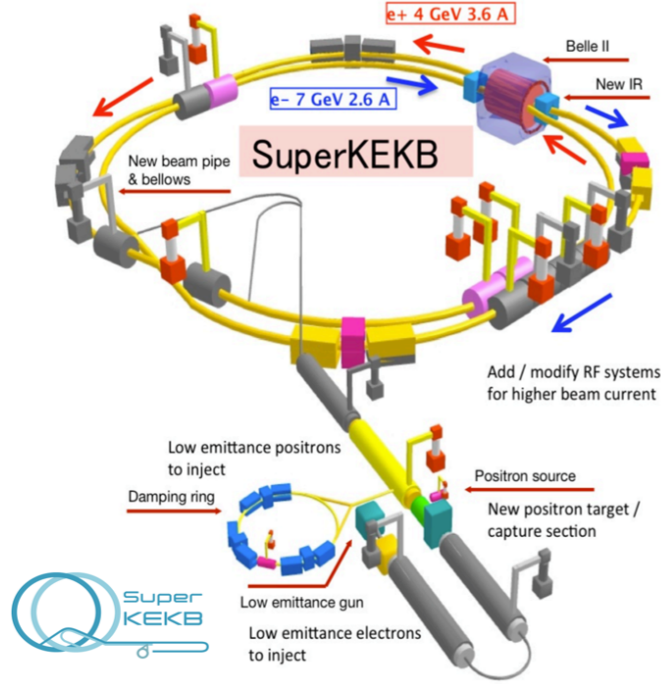
表 2.1 KEKB 和 SuperKEKB 的参数对比^[56]。

表中列出了束流电流 (I_{beam}), 束团个数, 束团电流 (I_{bunch}), 对撞点包络函数 (β_y^*), 束束作用参数 (ξ_y), 瞬时亮度 ($\mathcal{L}$) 和积分亮度 ($\int \mathcal{L}$)。

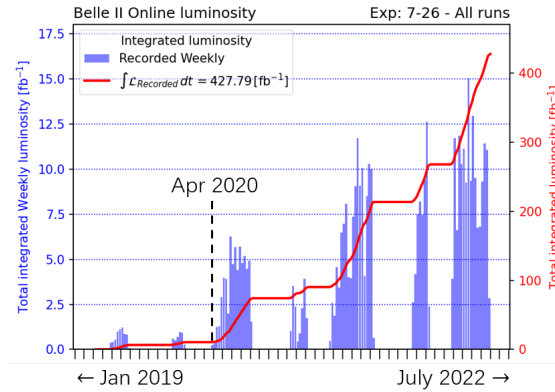
	KEKB Achieved		SuperKEKB 2020 May 1st		SuperKEKB 2022 June 22nd		SuperKEKB Design	
	LER	HER	LER	HER	LER	HER	LER	HER
I_{beam} [A]	1.637	1.188	0.438	0.517	1.363	1.118	3.6	2.6
# of bunches	1585		783		2249		2500	
I_{bunch} [Am]	1.033	0.7495	0.5593	0.6603	0.606	0.497	1.440	1.040
β_y^* [mm]	5.9	5.9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.27	0.30
ξ_y	0.129	0.090	0.0236	0.0219	0.0398	0.0278	0.0881	0.0807
$\mathcal{L}$ [$10^{34} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$]	2.11		1.57		4.71		80	
$\int \mathcal{L}$ [ab^{-1}]	1.04		0.03		0.424		50	

^①相比于 KEKB, SuperKEKB 的电子束能量更低, 正电子束能量更高, 主要目的是在高亮度的情况下延长束团的寿命, 减缓发射度的增长。

^②2019 到 2022 年又称为 Run 1 阶段。2024 年将进入 Run 2 运行阶段。


 图 2.4 SuperKEKB 对撞机示意图^[62]。

图中标出了正负电子束的能量和电流以及 Belle II 探测器的位置。


 图 2.5 Belle II Phase 3 积分亮度^[63]。

2.2.2 Belle II 探测器

Belle II 探测器沿用了 Belle 探测器的壳体、超导磁铁、轭铁和电磁量能器晶体，对其余部分进行了升级。Belle II 的结构如图 2.6 所示。从内层至外层分别为：硅像素探测器 (silicon pixel detector, PXD)、硅微条探测器 (silicon vertex detector, SVD)、中心漂移室 (central drift chamber, CDC)、气凝胶环像切伦科夫探测器 (aerogel ring-imaging Cherenkov detector, ARICH) 和传播时间探测器 (time-of-propagation counter, TOP)、电磁量能器 (electromagnetic calorimeter, ECL)、 K_L^0 和缪子探测器 (K_L^0 and muon detector, KLM) 和轭铁。Belle II 探测器的详细介绍

见文献^[59,64-65]。

Belle II Detector

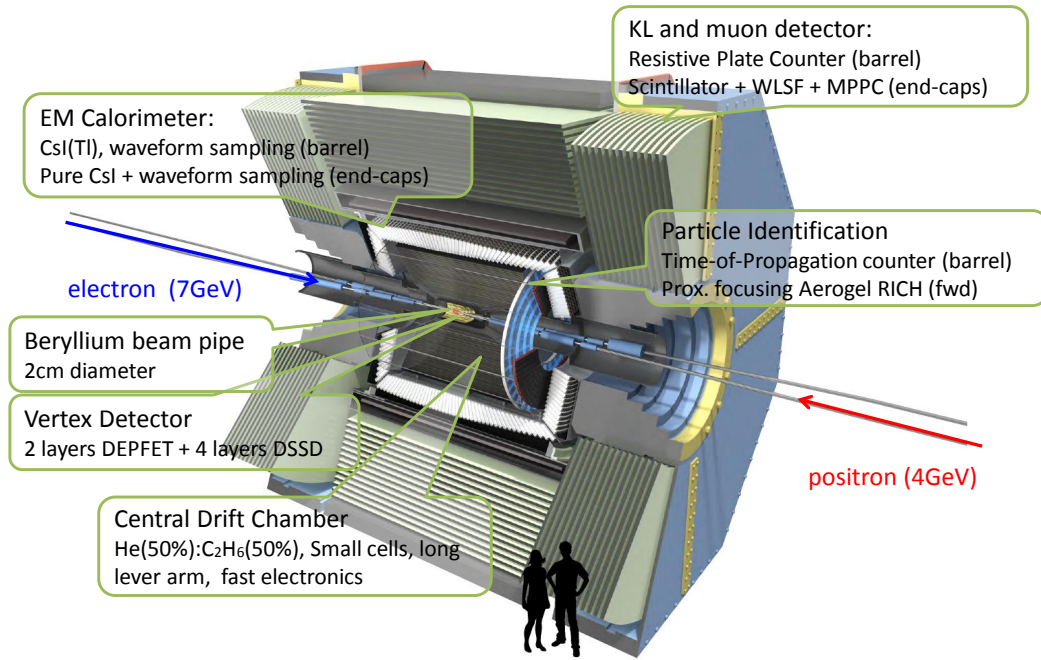


图 2.6 Belle II 探测器结构图^[66]。

1. 硅像素探测器 (PXD)

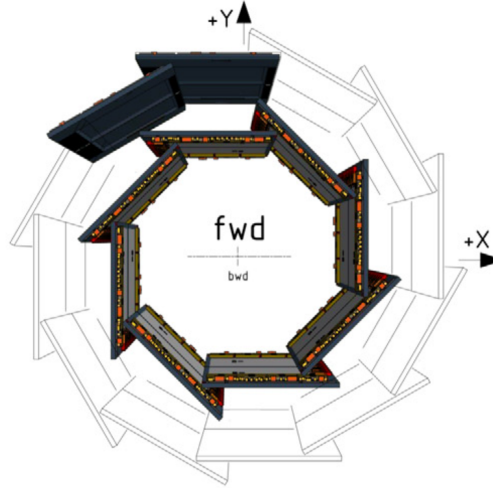
PXD 使用了耗尽场效应管 (depleted field effect transistor, DEPFET) 技术^①。PXD 共有两层，分别距对撞点 (interaction point, IP) 14 mm 和 22 mm。第一层和第二层分别有 8 个和 12 个梯子模块 (ladder)，如图 2.7 所示。每个梯子模块的正反两面分别贴有一个 DEPFET 模块。每个 DEPFET 模块上有 250×768 个像素。像素的尺寸在 $50 \times 55 \mu\text{m}^2$ 到 $50 \times 85 \mu\text{m}^2$ 之间随位置变化。像素的厚度为 $75 \mu\text{m}$ ，模块的整体厚度为 $525 \mu\text{m}$ ^[67]。在 Phase 3 阶段，PXD 安装了内层的 8 个梯子模块和外层的 2 个梯子模块 (图 2.7)。2023 年底，PXD 完成了所有梯子模块的安装。Belle SVD 最内层距 IP 30 mm，Belle II PXD 最内层距 IP 仅 14 mm。这种距离上的减小，提升了顶点的分辨能力，使得 D 介子衰变时间的分辨率提升了两倍^[68]。Belle II PXD 的详细介绍见文献^[59,64-65,67,69]。

2. 硅微条探测器 (SVD)

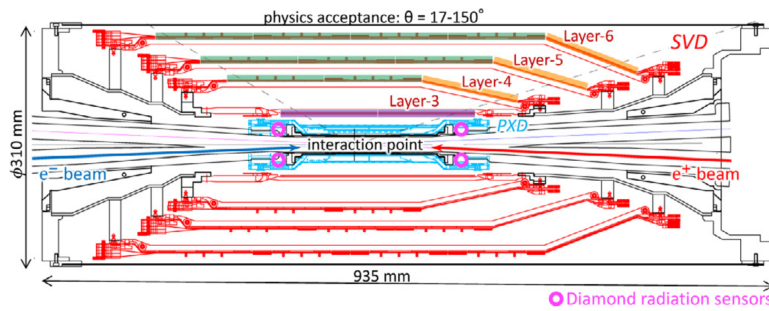
Belle II 的 SVD 由 4 层 DSSD 构成，分别距 IP 39 mm, 80 mm, 104 mm 和 135 mm^[70]。SVD 与 PXD 共同构成 Belle II 的顶点探测器 (vertex detector, VXD)，如图 2.8 所示^②。SVD 对带电粒子击中点在沿束流方向的位置分辨率约为 $25 \mu\text{m}$ ，

^①DEPFET 像素探测器的噪声小。其厚度可以做到很薄，薄意味着带电粒子在探测器中发生多重散射的概率低。

^②图中还标出了检测辐照量的钻石探测器 (Diamond)。为保护 VXD，当 Diamond 测量的瞬时辐照量超过阈值时，Diamond 将要求加速器将束团移出储存环 (beam-abort)，停止对撞。

图 2.7 Belle II PXD 探测器目前的安装情况^[67]。

在与束流垂直方向的位置分辨率约为 $11 \mu\text{m}$ ^[70]。Belle II SVD 使用了新的读出电子学，成形时间 (shaping time) 相比 Belle SVD2 减少约 10 倍。Belle II SVD 的详细介绍见文献^[59,64,70-72]。

图 2.8 Belle II 顶点探测器 (VXD) 示意图^[71]。

3. 中心漂移室 (CDC)

CDC 是一个 56 层的气体多丝室，内径 160 mm，外径 1130 mm。CDC 的填充气体为氦气 (50%) 和乙烷 (50%)。CDC 的详细介绍见文献^[59,64,73-74]。

4. 传播时间探测器 (TOP)

PID 系统由桶部的 TOP 和前端盖的 ARICH 组成。TOP 是一种内反射切伦科夫探测器 (detection of internally reflected cherenkov, DIRC)^[75-76]，由 16 个距离对撞点 1.2 m 的模块组成。每个模块由辐射体和微通道板光电倍增管 (micro channel plate photo multiplier, MCP-PMT) 构成。辐射体总长度为 2.6 m，由两块体积为 $(1250 \times 450 \times 20) \text{ mm}^3$ 的石英条和一个位于末端的镜子组成^[77]，如图 2.9 所示。镜子的体积为 $(100 \times 450 \times 20) \text{ mm}^3$ ，镜面曲率 6.5 m。石英条的一端连接着 10 cm 的棱镜。棱镜的另一端装有两排 MCP-PMT，每排 16 个。每个 MCP-PMT 有 4×4 个阳极读出通道。棱镜端面上共有 512 个 MCP-PMT 像素点^[75]。TOP 通过带电粒子发出的切伦科夫光在 MCP-PMT 上形成的图像鉴别粒子种类。图 2.9 展示了

TOP 的 K 介子效率和 π 介子误判率随动量变化的趋势。TOP 的详细介绍见文献[59,75,77-80]。

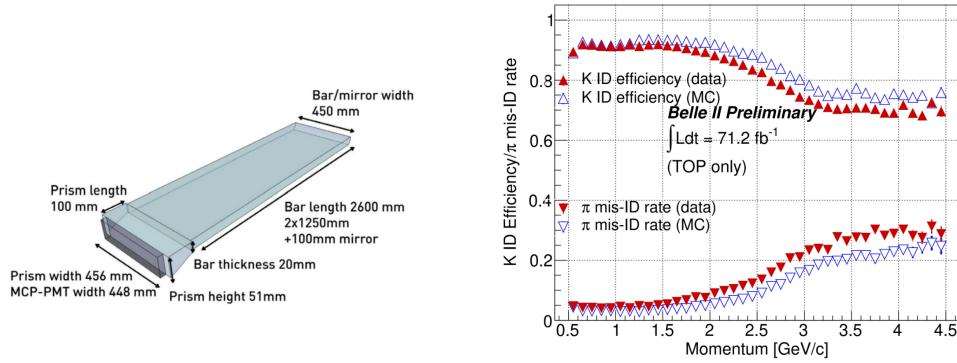


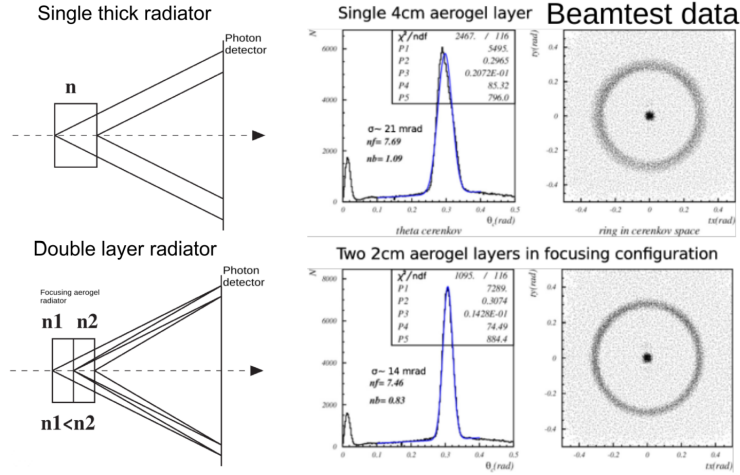
图 2.9 TOP 模块示意图 (左) 和 TOP 探测器的性能 (右)^[77]。

右图为 $\frac{L_K}{L_K + L_\pi} > 0.5$ 时, TOP 的 K 介子鉴别效率和 π 介子误判率随动量变化的趋势。

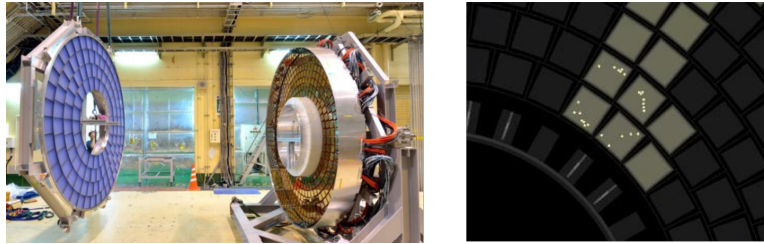
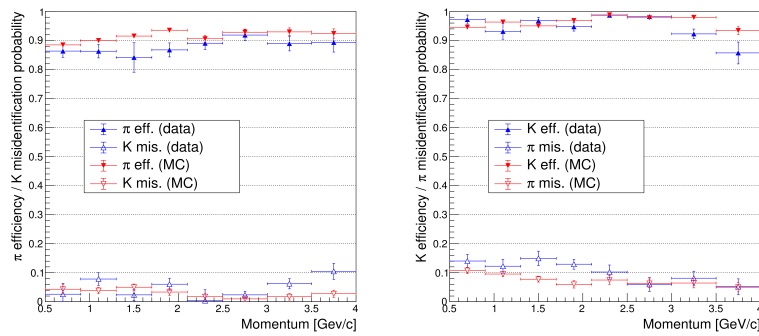
5. 气凝胶环像切伦科夫探测器 (ARICH)

ARICH 是一种近聚焦环像切伦科夫探测器 (proximity focusing ring imaging Cherenkov detector)^[81]。ARICH 使用了两层折射率不同的介质 (折射率分别为 1.045 和 1.054, 厚度均为 2 cm), 粒子在不同介质中发出的切伦科夫光指向光电器件的同一区域 (图 2.10)^①。ARICH 共有 248 块气凝胶介质片和 420 个混合雪崩光电二极管 (hybrid avalanche photo detector, HAPD), 如图 2.11 所示。介质片和 HAPD 之间有 160 mm 的间隙^[82]。每个 HAPD 上有 12×12 个 $(4.9 \times 4.9) \text{ mm}^2$ 的像素点。ARICH 通过带电粒子发出的切伦科夫光在 HAPD 上形成的图案 (图 2.11) 鉴别粒子种类。ARICH 的 K/π 鉴别效率和误判率随动量变化的趋势如图 2.12 所示。关于 ARICH 的详细介绍见文献^[59,81-82]。

^①相比于普通镜像聚焦切伦科夫探测器, 近聚焦环像切伦科夫探测器没有聚焦透镜, 其体积更小。由于没有透镜, 随着介质的增厚, 近聚焦环像切伦科夫探测器的对切伦科夫角的分辨率会变差^[59,81]。而介质越厚, 带电粒子穿过时的切伦科夫光子数越多, 探测效率越高。ARICH 使用了两层折射率不同的介质, 使得粒子在不同介质中发出的切伦科夫光指向光电器件的同一区域, 增加了介质的总厚度, 并且角分辨率未因增加厚度而变差, 如图 2.10。


 图 2.10 ARICH 原理示意图^[83]。

顶部的三幅图展示了带电粒子穿过单层 4 cm 厚的介质时发出的切伦科夫光形成的环图像。底部的三幅图展示了带电粒子穿过两层 2 cm 厚的折射率不同的介质时发出的切伦科夫光形成的环图像。后者的图像更为清晰，对切伦科夫角的分辨好于前者。


 图 2.11 左图为 ARICH 的介质 (蓝色) 和 HAPD^[83]，右图为一个宇宙线 μ 子在 ARICH 中发出的切伦科夫光形成的环^[64]。

 图 2.12 ARICH 的效率和误判率^[82]。

左图为 $\frac{L_\pi}{L_\pi + L_K} > 0.6$ 时，ARICH 的 π 介子鉴别效率和 K 介子误判率随动量变化的趋势。右图为 $\frac{L_K}{L_K + L_\pi} > 0.6$ 时，ARICH 的 K 介子鉴别效率和 π 介子误判率随动量变化的趋势。

6. 电磁量能器 (ECL)

ECL 沿用了 Belle 的 ECL 晶体、支撑结构和前端放大电路，升级了读出电子学^[64]。新读出电子学含波形采样电路，提高了 ECL 的时间分辨率，减轻了由束流本底带来的堆积效应。Belle II ECL 对能量大于 1 GeV 的光子的时间分辨率为 2–4 ns^[84]。Belle II ECL 的能量分辨与 Belle ECL 相仿^[85]。对于能量大于 100 MeV 的光子，其分辨约为 1.5%。对于能量为 20 MeV–100 MeV 的光子，分辨为 3.0%–1.5%。Belle II ECL 的详细介绍见文献^[59,64,86–87]。

7. K_L^0 和缪子探测器 (KLM)

KLM 在桶部有 14 层铁板和 14 层敏感区，在端盖有 14 层铁板和 12 层敏感区。桶部 KLM 靠外的 12 层敏感区沿用了 Belle 的 RPC，靠内的 2 层的敏感区为闪烁体。端盖的敏感区为闪烁体^①。Belle II KLM 的详细介绍见文献^[59,64–65]。

8. 触发系统 (Trigger)

触发系统 (Trigger)^[59,88] 由硬件触发 (Level 1 trigger) 和软件触发 (High Level Trigger, HLT) 组成。图 2.13 为硬件触发的示意图。各子探测器根据击中产生子触发信号。目前主要的子触发信号^[89] 有 CDC 二维径迹触发、基于神经网络的 CDC 三维径迹触发^[90]、ECL 沉积能量触发、ECL 击中数触发和 KLM 一维触发^②。子触发信号由全局重建逻辑 (global reconstruction logic, GRL) 进行初步整合，如匹配 CDC 径迹和 ECL 击中等。全局判断逻辑 (global decision logic, GDL) 根据子触发信号和 GRL 的结果得出硬件触发的结果和对撞的时间^[59,90]。硬件触发的最大触发率为 30 kHz^[59]。实际取数中，亮度为 $4.5 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ 时，硬件触发系统的触发率为 11.5 kHz^[89]。通过硬件触发的事例由软件触发继续筛选。软件触发运行在计算机集群上。软件触发根据除 PXD 之外的探测器的信息进行事例筛选。软件触发的主要条件有要求事例中有三条径迹或要求事例中有两条 μ 子径迹等^[91]。通过软件触发的事例由数据获取系统保存。

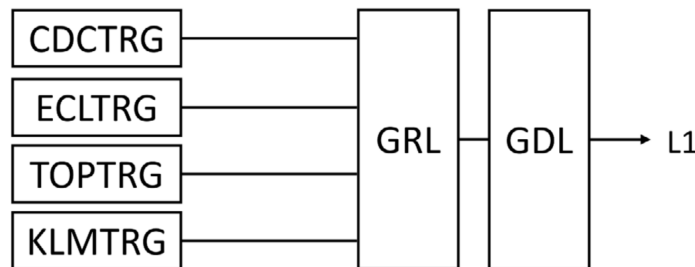


图 2.13 Belle II 硬件触发系统示意图^[92]。

^①使用闪烁体替代 RPC 是为了减少死时间，以应对高亮度下的中子本底。

^②TOP 触发未正式使用。

9. 数据获取系统 (DAQ)

图 2.14 为数据获取系统 (data acquisition, DAQ) 的示意图。数据获取系统由读出系统、事例组合器 (event builder)、存储系统和控制系统组成。读出系统通过 Belle2Link^[59] 将除 PXD 外的子探测器前端电子学的数据读出至通用流水线平台 (COmmon Pipelined Platform for Electronics Readout, COPPER)^[59] ①和读出计算机 (Readout PC)。COPPER 和 Readout PC 对数据进行打包后发送给事例组合器一。事例组合器一组合除 PXD 外的所有子探测器数据后发给软件触发。通过软件触发筛选的事例在事例组合器二中加入 PXD 数据, 保存在存储系统中。

PXD 的数据量较大, 由在线选择节点 (online selection node, ONSSEN) 根据 SVD 和软件触发提供的感兴趣区域 (regions of interest, ROI) 有选择地读出。

Belle II DAQ 的最大事例率为 30 kHz, 不包含 PXD 数据的单个事例大小约为 100 KB。ROI 选择前, 单个事例的 PXD 数据大小约为 1 MB。ROI 选择后, 单个事例的 PXD 数据大小为 100-200 KB。

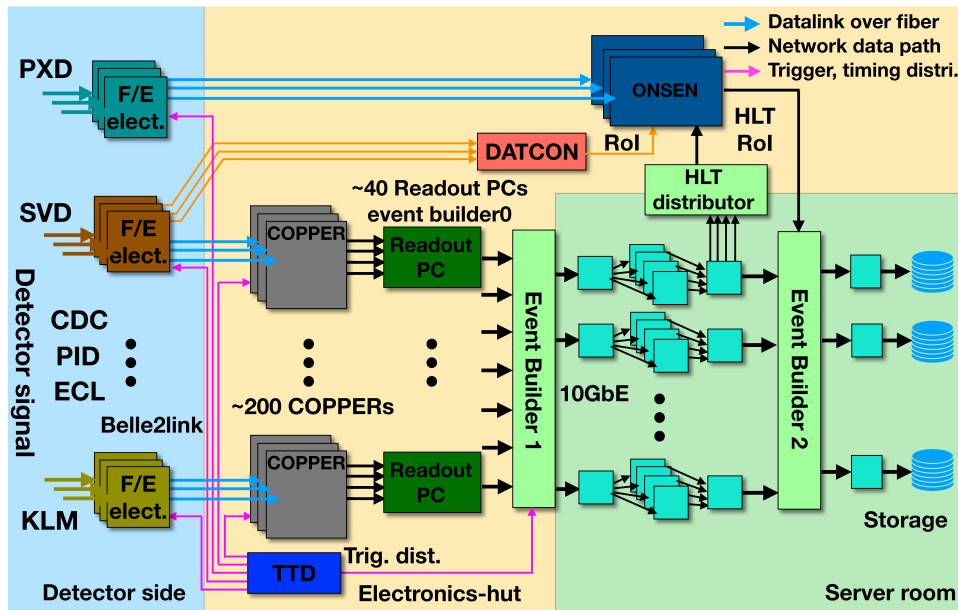


图 2.14 Belle II 数据获取系统示意图^[95]。

10. 离线分析软件

Belle II 的离线数据分析软件框架为 BASF2 (Belle II Analysis Software Framework)^[59,96]。BASF2 的功能包括探测器刻度、事例重建、蒙特卡洛模拟、Belle 和 Belle II 数据格式的转换 (B2BII)^[97] 和物理分析等。BASF2 提供系列物理分析工具如运动学拟合、顶点拟合、B 介子味道标记和全事例诠释 (Full Event Interpretation) 等。BASF2 将代码封装成模块。用户通过调用这些模块使用 BASF2。

① Belle II 合作组正在将 COPPER 板替换为性能更强的 PCIe40 板^[93-94]。

第3章 事例的重建与选择

3.1 数据样本

本文使用 Belle 和 Belle II 数据集中的 $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow c\bar{c} \rightarrow D^{*+} + X$, $D^{*+} \rightarrow D^0(\rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-) \pi^+$ 样本。Belle 数据集包含 $Y(4S)$ 和 $Y(5S)$ 数据, 积分亮度分别为 793 fb^{-1} 和 150 fb^{-1} 。Belle II 数据集仅含 $Y(4S)$ 数据, 积分亮度为 407 fb^{-1} ^①。

用 Belle^[46] 和 Belle II^[64] 官方的单举蒙特卡洛样本 (generic Monte Carlo sample, generic MC) 研究本底和验证 $M(D^0)$ - Q ^② 二维拟合的可靠性。Generic MC 中包含 B 介子对产生和 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ ($q = u, d, s, c$) 过程的模拟。用 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 相空间 MC 样本研究效率和分辨率。以上 MC 样本包含基于 GEANT^{[98][99]} 的探测器响应模拟。

用含 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合的玩具蒙特卡洛 (Toy MC) 样本验证含时拟合无偏, 研究含时拟合的系统误差。详见章节 6。

3.2 事例选择

信号过程 $D^{*+} \rightarrow D^0(\rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-) \pi^+$ 的选择条件如下:

$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 重建: 组合事例中的 π^+ 和 π^- , 对 $\pi^+ \pi^-$ 进行顶点拟合, 拟合成功的组合为 K_S^0 候选者, 要求 $0.488 < M(\pi^+ \pi^-) < 0.508 \text{ GeV}/c^2$ 。

$D^{*+} \rightarrow D^0(\rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-) \pi^+$ 重建: 要求事例中的 π 径迹离对撞点 (interaction point, IP) 的径向距离小于 1 cm , 轴向距离小于 5 cm ^③, 不对 π 介子进行粒子鉴别^{④⑤}。将 K_S^0 与 π^+ 和 π^- 径迹组合成 D^0 候选者。将 D^0 与 $\pi^\pm$ 组合成 $D^{*\pm}$ 候选者。对于 $Y(4S)(Y(5S))$ 样本, 要求 D^* 在 e^+e^- 质心系的动量大于 $2.5 \text{ GeV}/c$ ($3.1 \text{ GeV}/c$)^⑥。

第一次联合顶点拟合: 为提高动量分辨率和排除本底, 用 TreeFitter^[100] 联合拟合 D^* 衰变链上的顶点。拟合时将 K_S^0 约束到其质量的 PDG 值^[10], 将 D^* 顶点约束到 IP^⑦。要求拟合的 $\chi^2 < 200$ 。根据拟合结果计算 K_S^0 飞行距离 L_{flight} ^⑧ 和

^①本工作不使用 Belle 数据集中的 $Y(nS)$ ($n = 1, 2, 3$) 数据 (约 37 fb^{-1}) 和 Belle II 数据集中的 $Y(5S)$ 数据 (约 20 fb^{-1})。

^② Q 为 D^* 衰变的释放能量, 见章节 3.2。

^③用于重建 K_S^0 的 π 径迹不做此要求。

^④经过研究, 通常情况下, Belle 和 BelleII 的 D 介子重建仅依靠顶点重建和 D 介子不变质量区间就能达到很好的效果。粒子鉴别对提高信噪比帮助很小^[68]。

^⑤重建带电径迹时, 假设其质量为 π 介子质量, 即得此处的 π 径迹。

^⑥这个条件是为压低来自 B 介子衰变的 D^* 。若 D^0 来自 B 介子衰变中的 D^* , 则其衰变顶点离 IP 会有 B 介子和 D^0 介子两段飞行距离, 不利于 D^0 寿命计算, 故排除。相比于来自 $e^+e^- \rightarrow c\bar{c} \rightarrow D^* X$ 过程的 D^* , 由 B 介子衰变产生的 D^* 动量较低^[68]。

^⑦IP 的位置和误差由 $e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 事例测量。IP 位置的测量值每隔 30 分钟更新^[68,101]。

^⑧ K_S^0 衰变顶点离 D^0 衰变顶点的距离。

其误差 $\sigma_{L_{\text{flight}}}$ 。要求 $L_{\text{flight}}/\sigma_{L_{\text{flight}}} > 20$ ^①。

第二次联合顶点拟合：为将信号事例约束在达利兹图相空间内^②，用 TreFFitter 联合拟合 D^* 衰变链顶点。除第一次拟合的约束外，额外将 D^0 约束到其质量的 PDG 值。不对第二次拟合的 χ^2 做任何要求。后续分析的达利兹图变量来自第二次拟合，其余变量来自第一次拟合。

排除克隆径迹^{③④}：在 Belle 和 Belle II 的 MC 中，分别有 1% 和 0.1% 量级的 D^* 候选者包含克隆径迹。用变量 $dist$ 描述一个事件中两个不同的 D^* 候选者的相似程度：

$$dist = \sum_{p,f} \frac{(p_{f1} - p_{f2})^2}{\sigma^2(p_{f1}) + \sigma^2(p_{f2})} \quad (3.1)$$

其中， f 代表用于 D^* 重建的 5 个 π 介子。 p 代表每条 π 径迹的螺旋参数 (helix parameter)， $p = d_0, z_0, \omega, \tan\lambda, \phi_0$ 。 p_{f1} (p_{f2}) 代表第一个 (第二个) D^* 候选者的第 f 个 π 介子的螺旋参数。 σ 是螺旋参数的误差。相空间信号 MC 样本的 $dist$ 分布如图 3.1 所示。蓝直方图为 $dist$ 的总分布。红直方图代表 $dist$ 中的第一个和第二个 D^* 候选者都正确重建了 D^* 或者使用克隆径迹重建了 D^* 。其物理意义为，同一个 D^* 候选者都正确重建^⑤成了两个 D^* 候选者^⑥。这种组合主要分布在 $dist < 30$

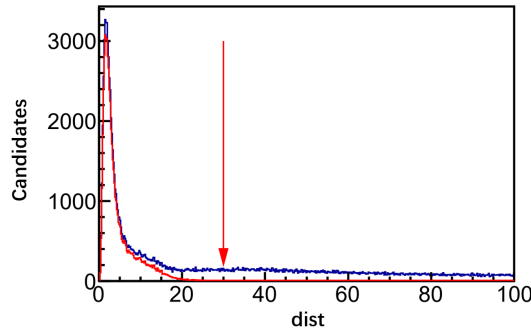


图 3.1 相空间信号 MC 样本的 $dist$ 分布。

蓝直方图为 $dist$ 的总分布。红直方图代表 $dist$ 中的第一个和第二个 D^* 候选者都正确重建了 D^* 或用克隆径迹重建了 D^* 。其物理意义为，同一个 D^* 被正确重建成了两个 D^* 候选者。这种组合主要分布在 $dist < 30$ 处。

处。定义一个事例中 $dist$ 小于 30 的候选者为一个克隆组。随机保留克隆组中的一个候选者，去除克隆组其余候选者。以上流程使克隆 D^* 候选者的占比降低了 50 倍。详见附录 B.3。

^①这个条件可以大大压低 $D^0 \rightarrow 4\pi$ 等不含 K_S^0 的 D^0 衰变事例。

^②若不做第二次联合拟合，一些在相空间边界的信号事例，会因动量分辨率而落在相空间外。

^③一条带电径迹可能会被重建成多条径迹^[102-104]。多余的径迹称为克隆径迹 (cloned tracks)。克隆径迹有相似的动量大小和方向。

^④另一种方法是，每个事例仅保留顶点拟合 χ^2 最小的候选者，或者每个事例随机保留一个候选者。这种方法会使达利兹图的效率出现明显的不对称。详见附录 B.2。

^⑤使用正确径迹的克隆径迹重建的 D^* 也视为正确重建。

^⑥此处假设一个事例中只有一个真实的 D^* 。实际的物理分析中考虑了含有两个真实的 D^* 的事例。

经过上述事例选择，候选样本中的 D^0 质量 $M(D^0)$ 和 D^* 衰变释放的能量 $Q = M(D^{*+}) - M(D^0) - m_{\pi^+}$ 的分布如图 3.2 所示。 m_{π^+} 为 π^+ 质量^[10]。 $M(D^0)$ 和 Q 分布中可以看到明显的信号。定义 $M(D^0)$ 信号区间为 $|M(D^0) - m_{D^0}| < 15 \text{ MeV}/c^2$ ； $M(D^0)$ 边带区为 $1.97 < M(D^0) < 2.00 \text{ GeV}/c^2$ ； Q 信号区间为 $4.85 < Q < 6.85 \text{ MeV}$ 。 $M(D^0)$ 信号区间的 Q 分布和 Q 信号区间的 $M(D^0)$ 分布如图 3.3 所示。点为 Belle II 数据，直方图为 Belle II generic MC 样本。不同成分的 MC 样本用不同的直方图标出。

Belle 和 Belle II 数据中的达利兹图如图 3.4 所示。图中，水平亮条纹主要来自卡比玻增强 (Cabibbo-favored) 过程 $D^0 \rightarrow K^*(892)^- \pi^+$ ；倾斜条纹主要来自 CP 奇 (CP -odd) 过程 $D^0 \rightarrow K_S^0 \rho$ 、 $D^0 \rightarrow K_S^0 \omega$ 和 $D^0 \rightarrow K_S^0 + \pi\pi$ S-Wave， $\pi\pi$ S-Wave 包含 $f_0(980)$ 等共振态；竖直条纹主要来自双卡比玻压低 (doubly Cabibbo-suppressed) 过程 $D^0 \rightarrow K^*(892)^+ \pi^-$ 、混合和卡比玻增强过程 $D^0 \rightarrow \bar{D}^0 \rightarrow K^*(892)^+ \pi^-$ 和 $\bar{D}^0$ 味道标记错误的 $\bar{D}^0 \rightarrow K^*(892)^+ \pi^-$ 过程。

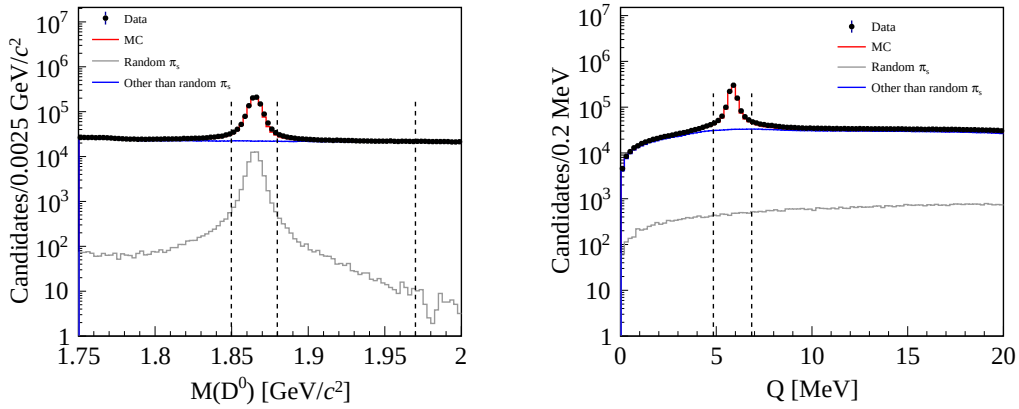


图 3.2 $M(D^0)$ 和 Q 的分布。

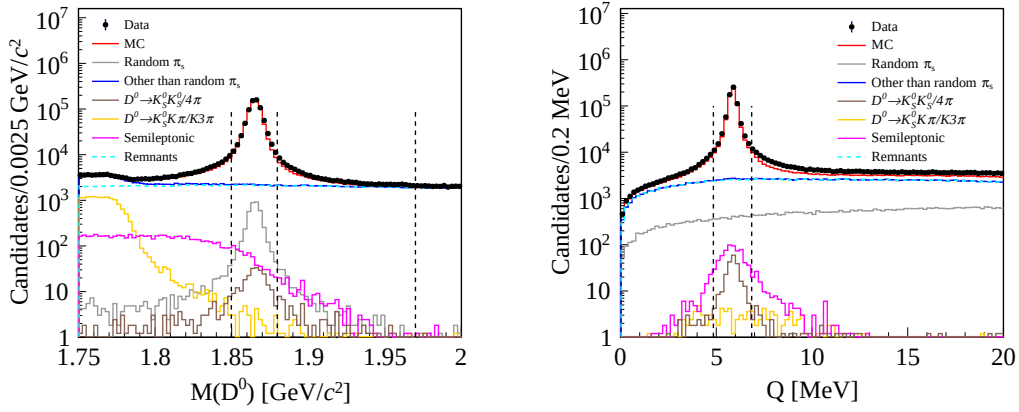
点为 Belle II 数据，红直方图为 Belle II generic MC 样本，灰直方图为随机 π 介子本底，蓝直方图为除随机 π 介子本底之外的所有本底。图中用竖线标出 $M(D^0)$ 信号区间 $|M(D^0) - m_{D^0}| < 15 \text{ MeV}/c^2$ ，和 Q 信号区间 $4.85 < Q < 6.85 \text{ MeV}$ 。

3.3 本底的分类

经过事例选择的候选样本中，共有以下几种成分：

(1) 信号事例。对于成功重建 $D^{*+} \rightarrow D^0(\rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-) \pi^+$ 衰变链的候选者，定义为信号。对于 π 介子衰变或 π 介子发生末态辐射的候选者，也定义为信号。信号的 $M(D^0)$ 和 Q 分布为窄峰。

(2) 随机 π 介子组合本底。当 D^0 重建正确，但未与正确的 π^+ 组合，导致 D^{*+} 重建错误的，定义为随机 π 介子组合本底。随机 π 介子组合本底的 $M(D^0)$


 图 3.3 $M(D^0)$ 和 Q 在信号区间的分布。

点为 Belle II 数据，红直方图为 Belle II generic MC 样本，灰直方图为随机 π 介子本底，蓝直方图为除随机 π 介子本底之外的所有本底。图中还展示了 $D^0 \rightarrow K_s^0 K^0/4\pi$ 衰变本底、 $D^0 \rightarrow K_s^0 K\pi/K3\pi$ 衰变本底、半轻衰变本底的分布，以及其余本底的总和。图中用竖线标出 $M(D^0)$ 信号区间 $|M(D^0) - m_{D^0}| < 15 \text{ MeV}/c^2$ ，和 Q 信号区间 $4.85 < Q < 6.85 \text{ MeV}$ 。

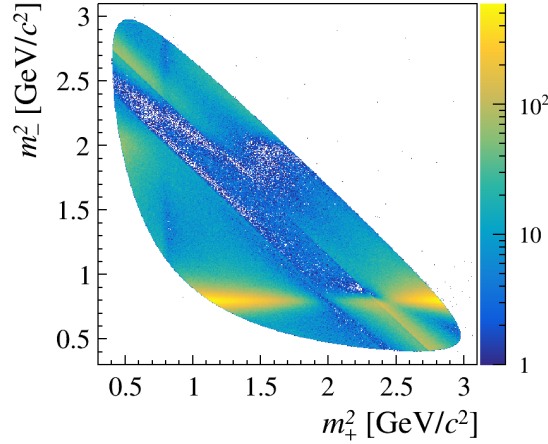


图 3.4 Belle 和 Belle II 数据中的达利兹图。

分布与信号相同， Q 分布上没有峰，如图 3.3 所示。

(3) $D^0 \rightarrow K_s^0 K_s^0/4\pi$ 衰变本底。这种本底的 $M(D^0)$ 和 Q 分布与信号相同。经章节 3.2 中对拟合 χ^2 和 K_s^0 飞行距离显著度的选择，此类本底在数据中的占比在 10^{-4} 量级。

(4) D^0 误重建本底。衰变链中，来自 D^{*+} 的 π^+ 重建正确， D^0 重建错误的，称为 D^0 误重建本底。这种本底可以细分成以下几类：

- ① $D^0 \rightarrow K_s^0 K\pi/K3\pi$ 衰变本底。这类本底的 $M(D^0)$ 分布在信号峰以左， Q 分布为信号峰周围的平滑分布，如图 3.3 所示。在 $M(D^0)$ - Q 信号区间这种本底的占比在 10^{-4} 量级。
- ② 半轻衰变本底。如 $D^0 \rightarrow K_s^0 \pi^- \ell^+ \nu$ 衰变等。这类本底会在 Q 分布上形

成平缓的峰，如图 3.3 所示。在 $M(D^0)$ - Q 信号区间此类本底的占比在 10^{-4} 量级。

- ③ 部分重建的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 衰变。对于 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 衰变，仅有一个或两个末态粒子被正确重建的，称为部分重建的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 衰变本底。在 $M(D^0)$ - Q 信号区间此类本底的占比在 1% 量级。其 $M(D^0)$ 和 Q 分布在不同达利兹图区间的形状不同，总体较为平缓。详见附录 B.4。
- ④ 部分重建的 D^0 强子衰变。如 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^- \pi^0$ 等。这类本底有可能会在 Q 分布上形成非常平缓的峰。在 $M(D^0)$ - Q 信号区间此类本底在总事例数的占比在 10^{-4} 量级。

(5) 交换 π 介子本底。当衰变链中的所有末态都重建正确，仅 D^* 衰变的 π 和 D^0 衰变的 π 在衰变链中交换了位置，称为交换 π 介子本底。这种本底的 $M(D^0)$ 和 Q 分布为平缓的峰。 $M(D^0)$ - Q 信号区间中，在整个 D^0 衰变相空间此类本底的平均占比约为 10^{-4} 。在达利兹图的 -4 ， -5 和 -6 区间， D^* 衰变的 π 和 D^0 衰变的 π 的动量接近，此类本底的占比约为 10^{-3} 。此类本底会造成达利兹图信号效率不对称。详见附录 B.2。

(6) 纯组合本底。除上述情况外，其他情况归类为纯组合本底。这类本底不会在 $M(D^0)$ 和 Q 分布上形成峰。

由上述可知，候选样本中存在多种非平本底，完全描述较为困难。后续分析中仅考虑三种成分：信号，随机 π 介子本底和其他本底。其中，其他本底由平滑函数描述，忽略峰状本底。此本底描述方法带来的系统误差见章节 6。

3.4 信号事例的效率和分辨率

本章节基于相空间 MC 研究效率随达利兹图和衰变时间的变化趋势，以及达利兹图和衰变时间的分辨率。效率为通过事例选择的事例数与产生的事例数之比。计算效率时，为去除探测器分辨率对效率的影响，用产生子层次的达利兹变量 m_{true}^2 和衰变时间 t_{true} ，划分计算效率的区间。分辨率即测量过程中物理变量分布的展宽。通过产生子层次变量和探测器重建层次的变量之差研究分辨率。如达利兹变量 m_+^2 的分辨率可在 $\delta m_+^2 = m_+^2 - m_{+ \text{true}}^2$ 分布中提取；衰变时间分辨率可在 $\delta t = t - t_{\text{true}}$ 分布中提取。

3.4.1 效率随达利兹图的变化趋势

基于 $m_{\pi\pi}^2$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 构成的达利兹图研究效率的变化趋势^①。其中， $m_{\pi\pi}$ 为 $\pi^+ \pi^-$ 的不变质量。 $\theta_{\pi\pi}$ 是 $\pi^+ \pi^-$ 系统的螺旋度角 (helicity angle)，定义为 $\pi^+ \pi^-$ 静

^① 相比于 m_+^2 和 m_-^2 构成的达利兹图，此达利兹图的边界简单，变量间关联性较小。

止系中, π^- 动量和 K_S^0 动量的夹角^①。

图 3.5-3.8 为 Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 的相空间 MC 样本中, 效率随达利兹图的变化趋势。可见, 效率变化的幅度较小。在含时拟合中 (章节 6) 不考虑效率随达利兹平面的变化趋势。在系统误差中考虑效率随达利兹平面变化带来的影响。

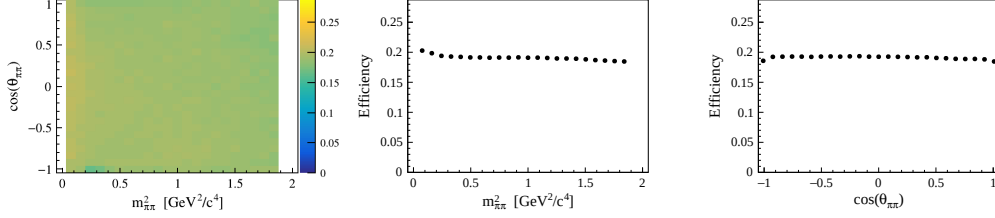


图 3.5 Belle II 相空间 MC 样本中效率随达利兹图的变化趋势。

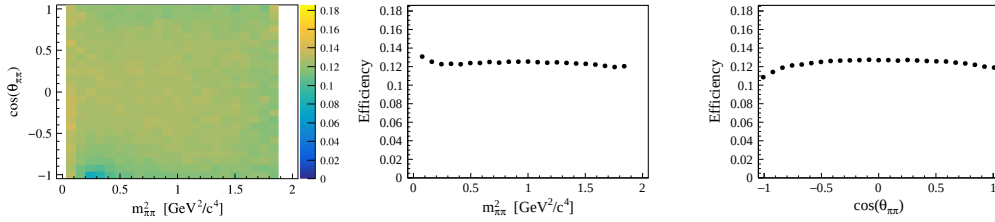


图 3.6 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中效率随达利兹图的变化趋势。

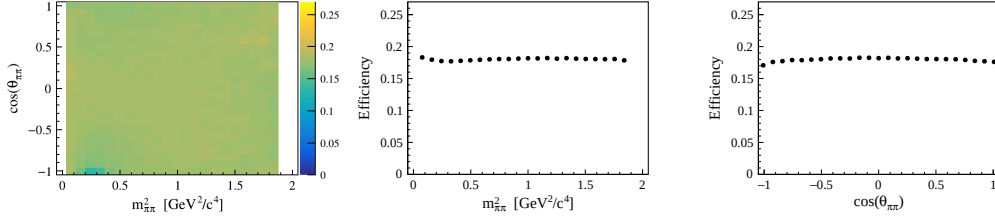


图 3.7 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中效率随达利兹图的变化趋势。

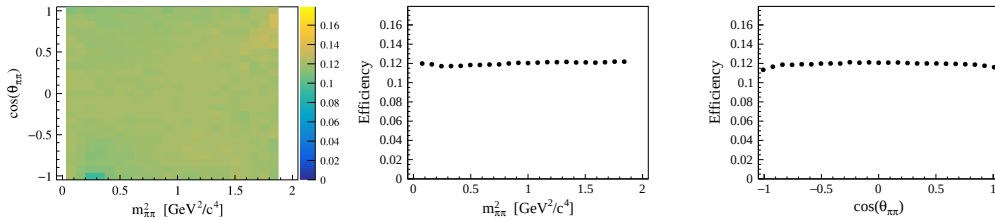


图 3.8 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中效率随达利兹图的变化趋势。

3.4.2 达利兹图的分辨率

图 3.9-3.12 为 $m_{\pi\pi}^2$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 构造的达利兹图在不同区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中展示了达利兹图 $(m_{\pi\pi}^2, \cos(\theta_{\pi\pi}))$ 的 10×10 个等分区间内的分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数。相关系数在 $-0.2 \sim 0.2$

^① $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 可用 m_-^2 和 $m_{\pi^+\pi^-}^2$ 表示。详见附录 E.1。

之间随达利兹图变化。

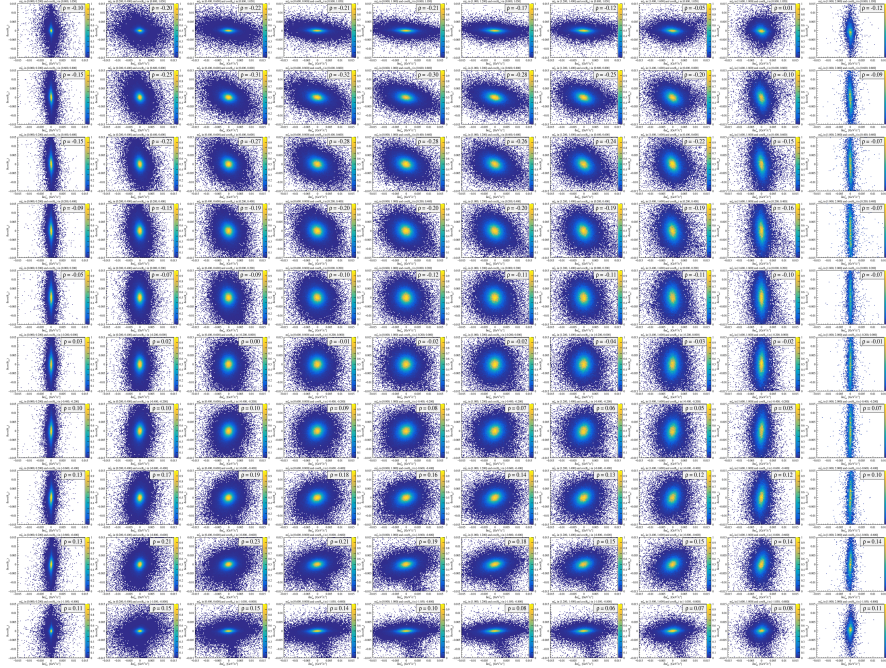


图 3.9 Belle II 相空间 MC 样本中，达利兹图 $(m_{\pi\pi}^2, \cos(\theta_{\pi\pi}))$ 的 10×10 个等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

每张图的横坐标为 $\delta m_{\pi\pi}^2$ ，范围 $[-0.015, 0.015] \text{ GeV}^2/c^4$ ；纵坐标为 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ ，范围 $[-0.015, 0.015]$ 。图中还展示了 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 的相关系数 (ρ)。大图见附录 B.5。

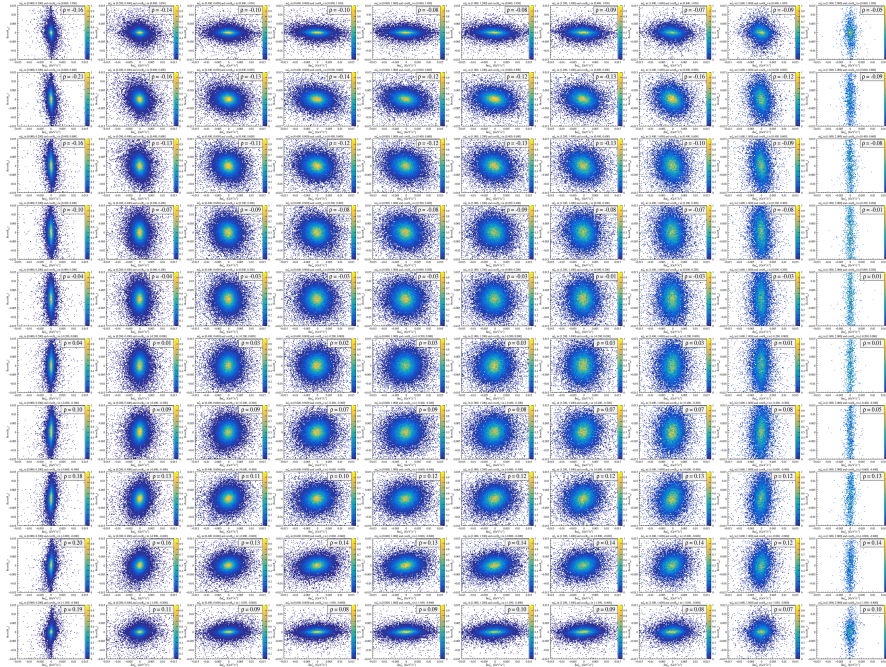


图 3.10 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中，达利兹图 $(m_{\pi\pi}^2, \cos(\theta_{\pi\pi}))$ 的 10×10 个等分区间的 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 二维分布。

每张图的横坐标为 $\delta m_{\pi\pi}^2$ ，范围 $[-0.015, 0.015] \text{ GeV}^2/c^4$ ；纵坐标为 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ ，范围 $[-0.015, 0.015]$ 。图中还展示了 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 的相关系数 (ρ)。大图见附录 B.5。

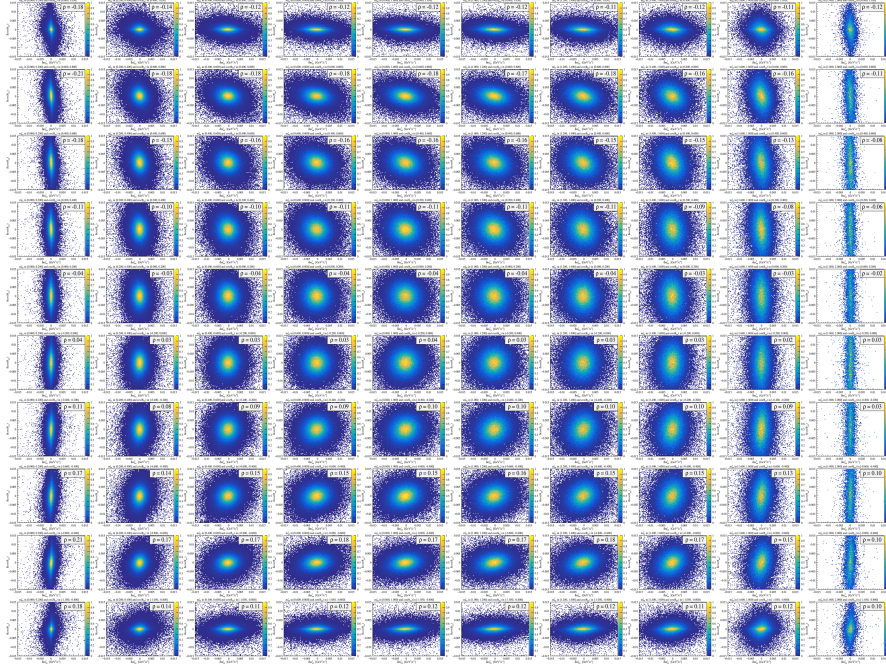


图 3.11 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中，达利兹图 $(m_{\pi\pi}^2, \cos(\theta_{\pi\pi}))$ 的 10×10 个等分区间的 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 二维分布。

每张图的横坐标为 $\delta m_{\pi\pi}^2$ ，范围 $[-0.015, 0.015] \text{ GeV}^2/c^4$ ；纵坐标为 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ ，范围 $[-0.015, 0.015]$ 。图中还展示了 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 的相关系数 (ρ)。大图见附录 B.5。

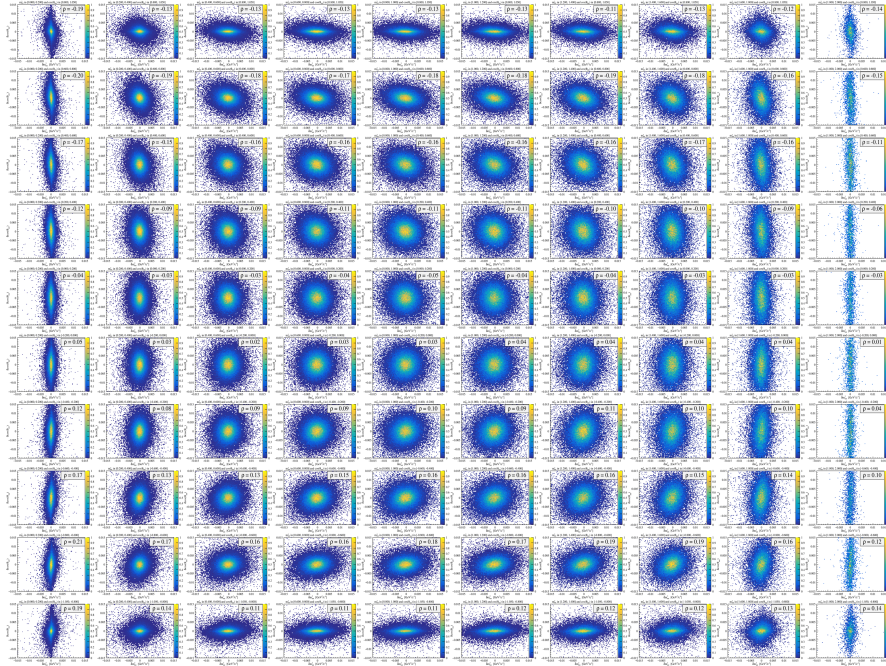


图 3.12 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中，达利兹图 $(m_{\pi\pi}^2, \cos(\theta_{\pi\pi}))$ 的 10×10 个等分区间的 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 二维分布。

每张图的横坐标为 $\delta m_{\pi\pi}^2$ ，范围 $[-0.015, 0.015] \text{ GeV}^2/c^4$ ；纵坐标为 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ ，范围 $[-0.015, 0.015]$ 。图中还展示了 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 的相关系数 (ρ)。大图见附录 B.5。

$m_{\pi\pi}^2$ 的分辨率小于 $10 \text{ MeV}^2/c^4$ 。与 $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $m_{\pi\pi}^2$ 分辨率对应的 $m_{\pm}^2$ 的分辨率小

于 $10 \text{ MeV}^2/c^4$ 。 $m_{\pm}^2$, $m_{\pi\pi}^2$ 分辨率远小于 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 过程中主要的中间共振态宽度的平方, 在含时拟合中 (章节 6) 不考虑达利兹图的分辨率。在系统误差中考虑达利兹图的分辨率带来影响。

3.4.3 效率随衰变时间的变化趋势

图 3.13 为相空间 MC 样本的效率随衰变时间的变化趋势。可见变化幅度非常小。本工作忽略效率随衰变时间的变化趋势。

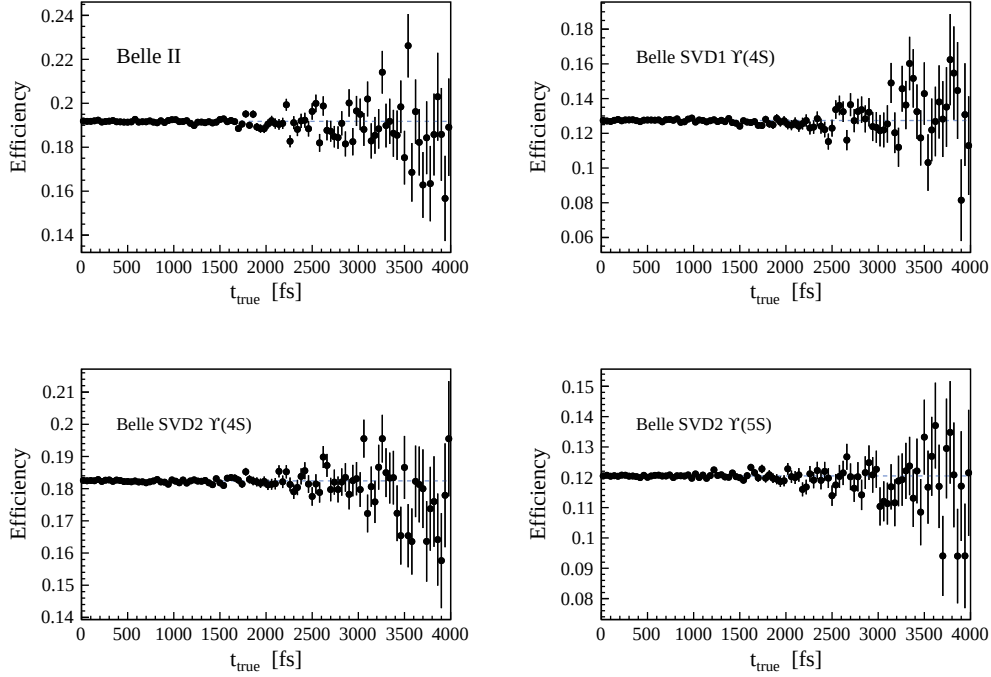


图 3.13 Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本的效率随 D^0 衰变时间的变化趋势。

3.4.4 衰变时间的分辨率

图 3.14 为相空间 MC 样本的 δt 分布。不同事例的衰变时间测量误差 σ_t 不同。用 $\delta t/\sigma_t$ 将 σ_t 从 δt 分布中分离。 $\delta t/\sigma_t$ 的分布如图 3.15 所示。实线为双高斯拟合的结果。图 3.15 中的拟合结果仅做定性分析使用。含时拟合中, 衰变时间的分辨率参数是浮动的。

$\delta t/\sigma_t$ 的平均值和标准差随衰变时间的变化趋势如图 3.16-3.17 所示。变化幅度很小。 $\delta t/\sigma_t$ 的平均值随 σ_t 的变化幅度很小, 如图 3.18 所示。 $\delta t/\sigma_t$ 的标准差随 σ_t 的变化趋势趋势如图 3.19 所示。式 4.19 将 $\delta t/\sigma_t$ 的宽度描述为 σ_t 的一阶多项式^{①②}。

^① 式 4.19 将 δt 的宽度描述为 σ_t 的二阶多项式, 等价于将 $\delta t/\sigma_t$ 的宽度描述为 σ_t 的一阶多项式。

^② 图 3.19 中, $\delta t/\sigma_t$ 的宽度和 σ_t 可用更高阶多项式描述。在 Belle II MC 和数据的拟合中发现, 一阶多项式的拟合效果好, 拟合稳定。拟合还发现, 对于 Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 的 MC 和数据, 一次项的显著度不高。这与图 3.19 中, Belle MC 样本的斜率偏低吻合。

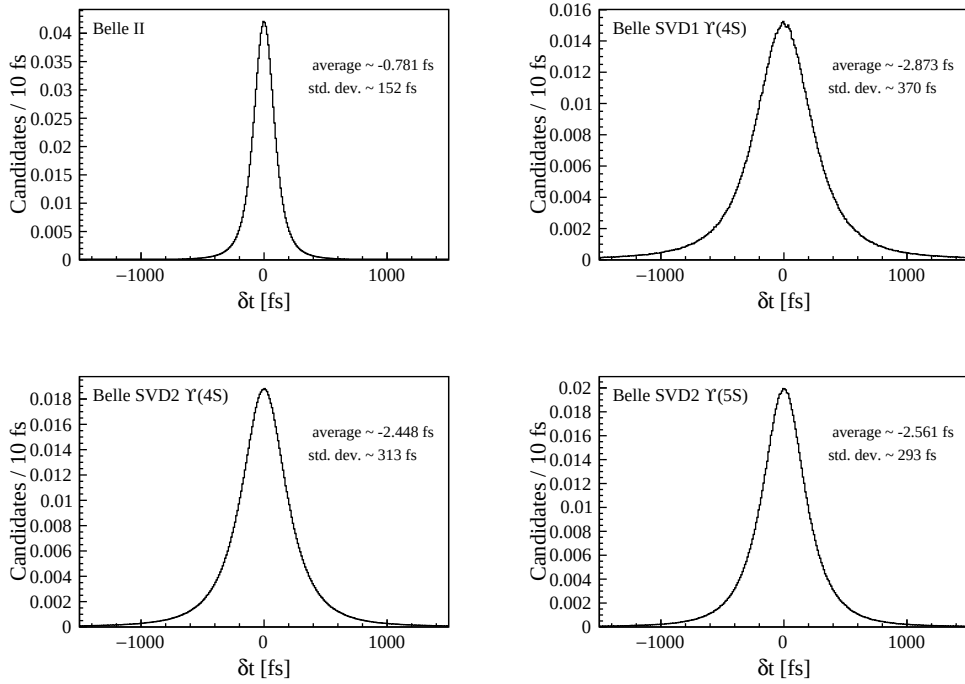


图 3.14 Belle II, Belle SVD1 $\Upsilon(4S)$, Belle SVD2 $\Upsilon(4S)$ 和 Belle SVD2 $\Upsilon(5S)$ 相空间 MC 样本的 δt 分布。

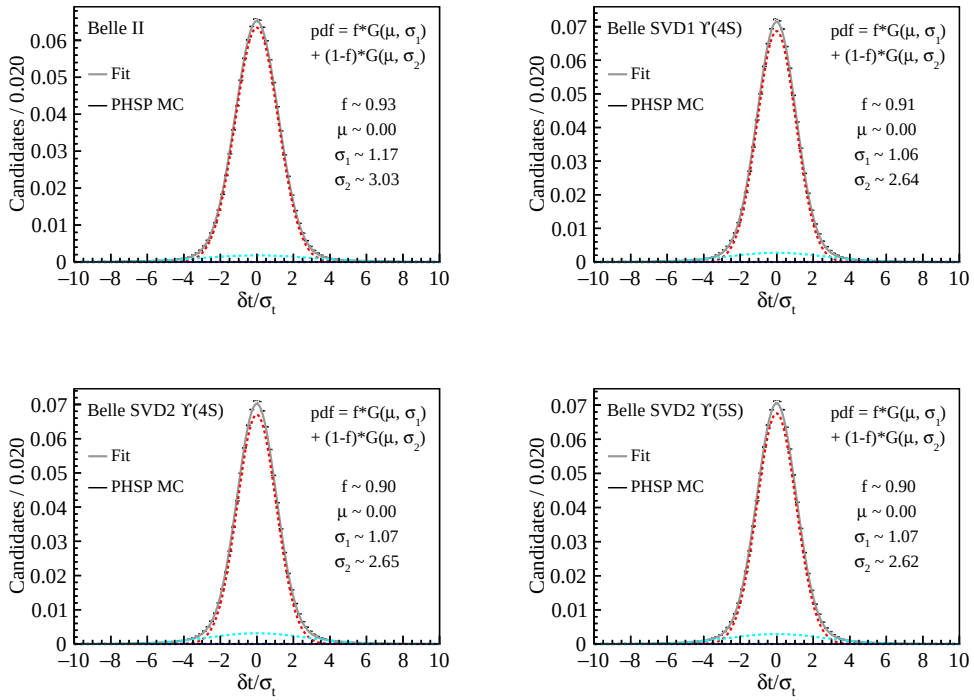


图 3.15 Belle II, Belle SVD1 $\Upsilon(4S)$, Belle SVD2 $\Upsilon(4S)$ 和 Belle SVD2 $\Upsilon(5S)$ 相空间 MC 样本的 $\delta t/\sigma_t$ 分布。

实线为双高斯拟合的结果。虚线为双高斯函数中的单高斯成分。图中还展示了双高斯函数的参数。

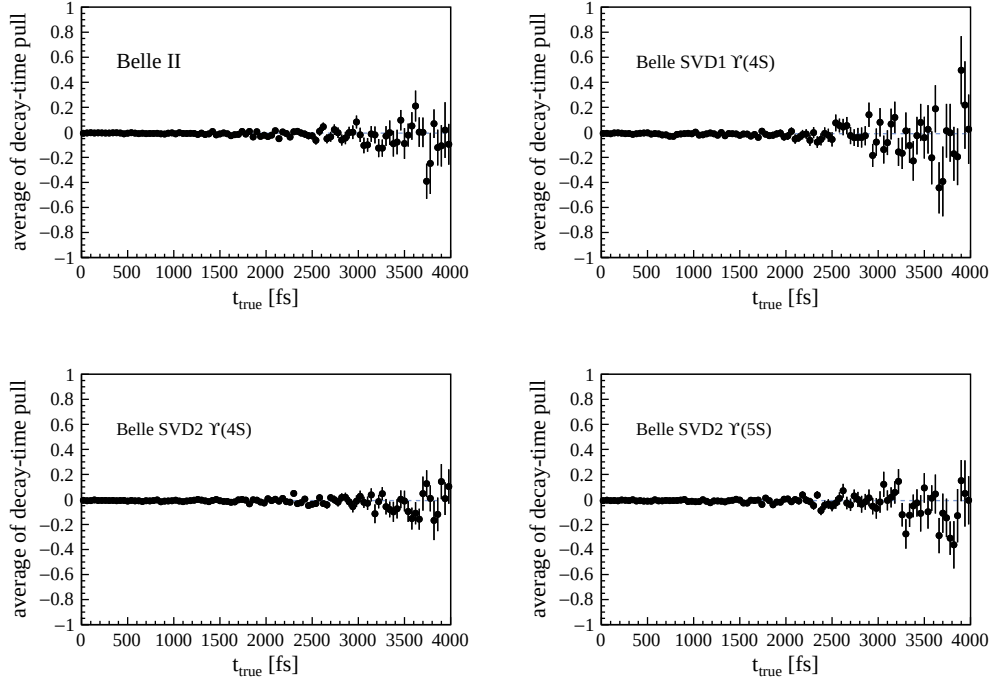


图 3.16 Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本 $\delta t/\sigma_t$ 分布的均值随 D^0 衰变时间的变化趋势。

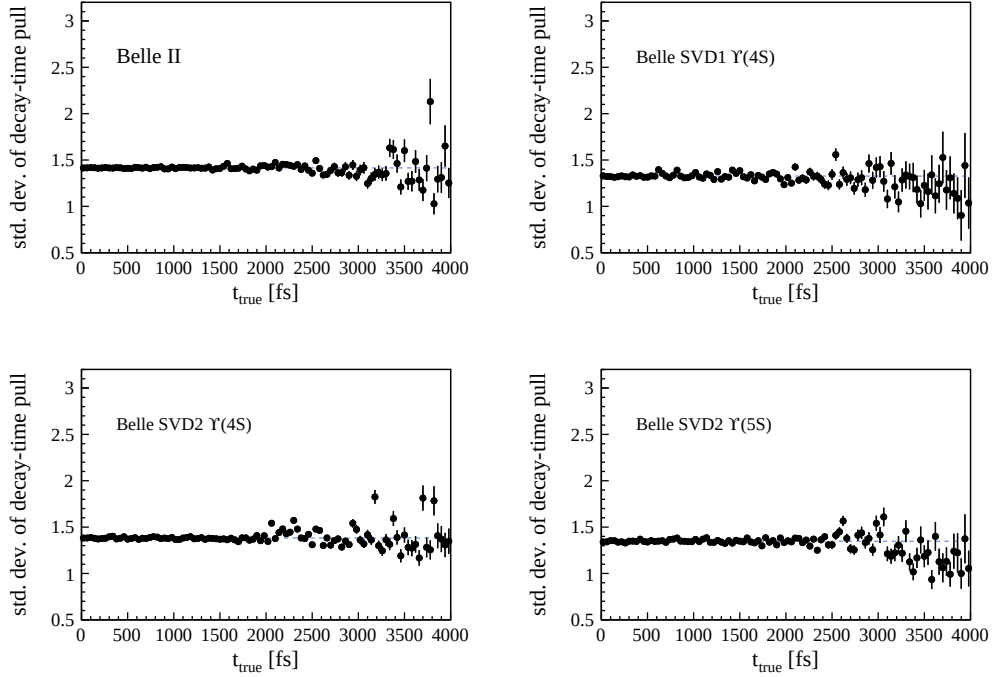


图 3.17 Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本 $\delta t/\sigma_t$ 分布的标准差随 D^0 衰变时间的变化趋势。

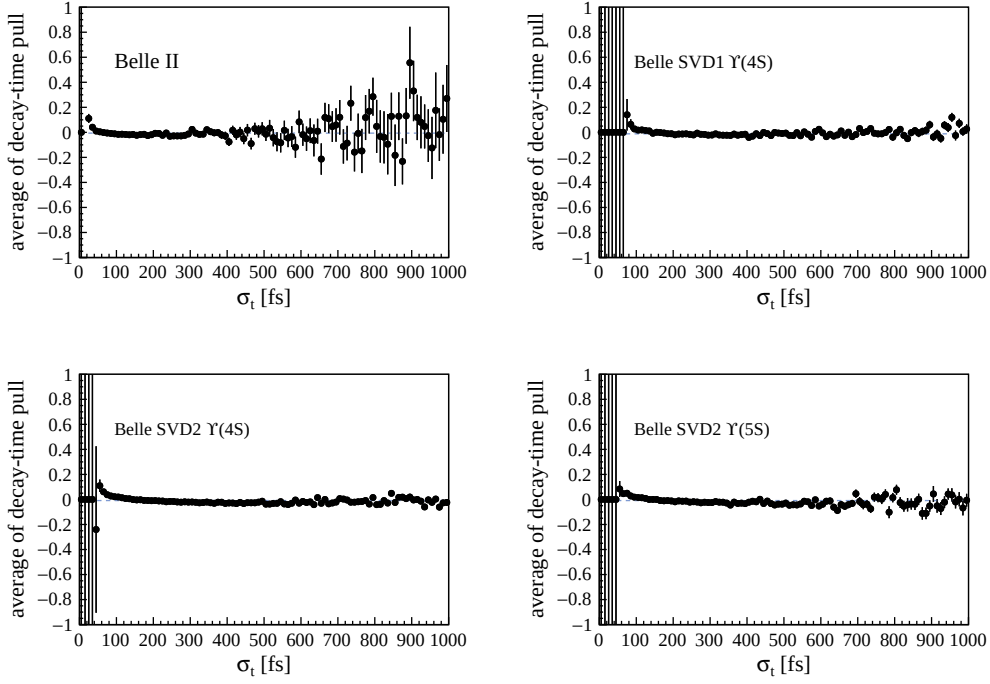


图 3.18 Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $\delta t/\sigma_t$ 的平均值随 σ_t 的变化趋势。

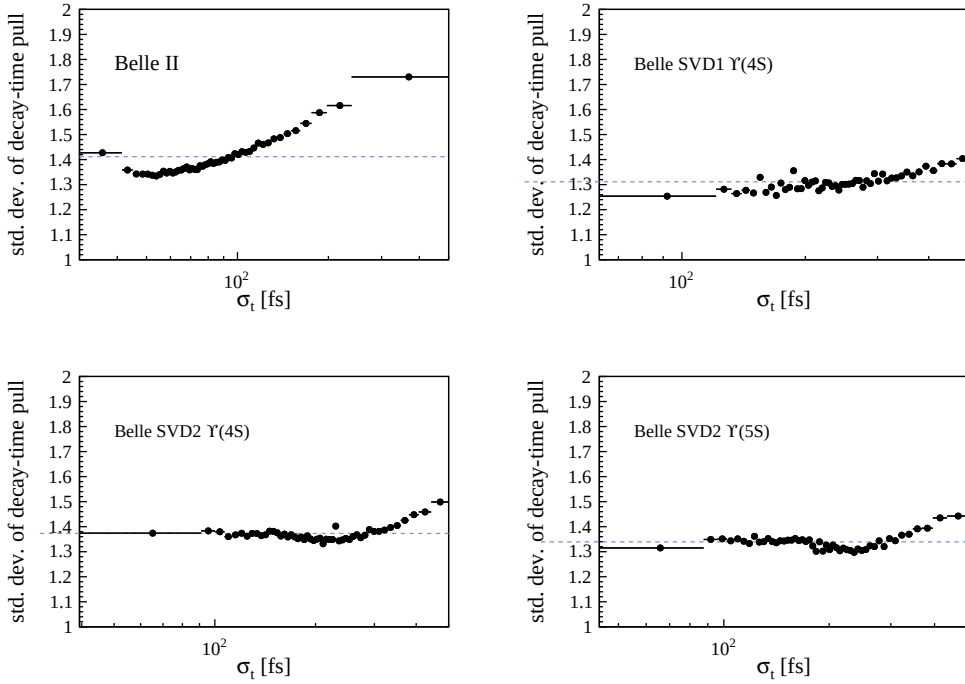


图 3.19 Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $\delta t/\sigma_t$ 的标准差随 σ_t 的变化趋势。

第 4 章 $D^0-\bar{D}^0$ 混合的模型无关测量方法

章节 3 已在 Belle 和 Belle II 数据集中选出了用于测量 $D^0-\bar{D}^0$ 混合的样本。本章将介绍模型无关测量方法，后续章节将基于该方法测量 $D^0-\bar{D}^0$ 混合参数。

4.1 模型依赖与模型无关测量方法

基于 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 样本测量混合参数，可使用模型依赖方法或模型无关方法。以下简要说明。

在式 1.11 中，令 $f = K_S^0 \pi^+ \pi^-$ ，并用 $K_S^0 \pi^\pm$ 不变质量 $m(K_S^0 \pi^\pm)$ 定义达利兹图变量^①

$$m_\pm^2 \equiv \begin{cases} m^2(K_S^0 \pi^\pm) & , \text{ 初态为 } D^0 \\ m^2(K_S^0 \pi^\mp) & , \text{ 初态为 } \bar{D}^0 \end{cases} . \quad (4.1)$$

则有

$$T_f(m_+^2, m_-^2, t) = A_f(m_+^2, m_-^2)g_+(t) + \frac{q}{p}\bar{A}_f(m_-^2, m_+^2)g_-(t) . \quad (4.2)$$

平方后，得含时衰变率

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{N}} |T_f(m_+^2, m_-^2; t)|^2 &= \frac{1}{\mathcal{N}} \left[|A_f(m_+^2, m_-^2)|^2 |g_+(t)|^2 + |\bar{A}_f(m_-^2, m_+^2)|^2 \left|\frac{q}{p}\right|^2 |g_-(t)|^2 \right. \\ &\quad + A_f(m_+^2, m_-^2) \bar{A}_f^*(m_-^2, m_+^2) \left(\frac{q}{p}\right)^* g_+(t) g_-^*(t) \\ &\quad \left. + A_f^*(m_+^2, m_-^2) \bar{A}_f(m_-^2, m_+^2) \frac{q}{p} g_+^*(t) g_-(t) \right] , \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\mathcal{N}$ 为归一化因子。文献^[36-40]基于 Isobar 模型，用级联的两体衰变构造 D^0 三衰变振幅 $A_f(m_+^2, m_-^2)$ ，考虑 K^* ， ρ ， ω 等中间共振态的贡献，用式 4.3 拟合数据的 (m_+^2, m_-^2, t) 三维分布^②。这种方法称为模型依赖方法，也称含时达利兹图分析。模型依赖方法的优势在于，不依赖 D 介子对产生实验的强相角差测量值，仅凭单个实验的数据即可完成 $D^0-\bar{D}^0$ 混合的测量。这种方法的缺点是需要考虑模型带来的误差。在高统计量下，模型误差可能会成为限制测量精度的主要因素^[105]。

在达利兹图对称的 16 个区间内 (图 4.1)，对式 4.3 积分，得区间 b 内的含时衰变率， $b = -8, -7, \dots, -1, 1, \dots, 7, 8$

$$p_b(t; D^0) \propto F_b |g_+(t)|^2 + \bar{F}_b \left|\frac{q}{p}\right|^2 |g_-(t)|^2 + 2\sqrt{F_b \bar{F}_b} \text{Re}[X_b \frac{q}{p} g_+^*(t) g_-(t)] , \quad (4.4)$$

^①初态为 D^0 的情况包括直接衰变过程 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 和混合过程 $D^0 \rightarrow \bar{D}^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 。

^②有的工作拟合四维分布 $(m_+^2, m_-^2, t, \sigma_t)$ ， σ_t 为衰变时间的误差。不同事例的 σ_t 不同。

其中

$$F_b = \int_b |A_f(m_+^2, m_-^2)|^2 dm_+^2 dm_-^2, \quad (4.5)$$

$$\bar{F}_b = \int_b |\bar{A}_f(m_+^2, m_-^2)|^2 dm_+^2 dm_-^2, \quad (4.6)$$

$$X_b = \frac{1}{\sqrt{F_b \bar{F}_{-b}}} \int_b A_f^*(m_+^2, m_-^2) \bar{A}_f(m_-^2, m_+^2) dm_+^2 dm_-^2. \quad (4.7)$$

若 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 中不存在第一类 CP 破坏, 则 $A_f(m_+^2, m_-^2) = \bar{A}_f(m_+^2, m_-^2)$ 。此时, $F_b = \bar{F}_b$, $X_b = \bar{X}_b$, $X_b = X_{-b}^*$ 。强相角差 $X_b = c_b - is_b$, 由 BESIII 和 CLEO 合作组利用 D 介子对的量子关联效应测量^[106-107]。对于 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 的达利兹图, 目前有三种分区方式^[106-107], 平均分区 (equal $\Delta\delta_D$ binning), 最优分区 (optimal binning) 和改进的最优分区 (modified optimal binning)。目前所有的模型无关 $D^0-\bar{D}^0$ 混合测量均选用平均分区。本工作也选用平均分区 (图 4.1)。

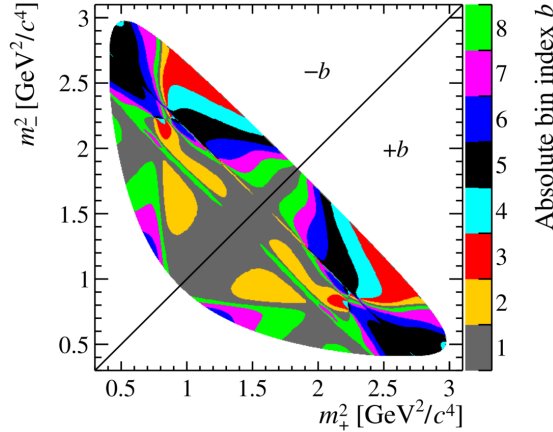


图 4.1 平均分区 (equal $\Delta\delta_D$ binning)^[105-107]。

文献^[41-43,105,108-109]基于式 4.4 联合分析 16 个达利兹图区间内的衰变时间分布。这种方法称为模型无关方法。模型无关方法的优点是无需考虑模型的误差, 缺点是需要外部输入的强相角信息。强相角的误差会限制测量的精度。根据文献^[43], 目前 BESIII 和 CLEO 的强相角测量值^[106-107]的精度足以支撑事例数不超过 3×10^7 的分析。

4.2 LHCb 实验使用的模型无关测量方法

现有的模型无关 $D^0-\bar{D}^0$ 混合测量工作均来自 LHCb 实验。LHCb 采用过两种方法。第一种方法^[41]即对 $g_{\pm}(t)$ 取 z 的一阶近似

$$\begin{aligned} g_+(t) &\approx 1 + O((z\Gamma t)^2) \quad , \\ g_-(t) &\approx z\Gamma t/2 + O((z\Gamma t)^3) \quad . \end{aligned}$$

则对式 4.4 有

$$p_b(t; D^0) \propto \Gamma e^{-\Gamma t} \left[F_b + \Gamma t \sqrt{F_b F_{-b}} \operatorname{Re}(X_b z) + O((z\Gamma t)^2) \right] \quad . \quad (4.8)$$

基于式 4.8 同时拟合 $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$, $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 样本的 16 个达利兹区间内衰变时间 t 的分布。拟合时考虑不同事例的顶点拟合优度^①不同。为描述含时本底, 将本底区分为两类: 第一类, D^0 重建正确, D^{*+} 重建错误; 第二类, D^0 重建错误。

第二种方法^[32,42,44,105]称为反转区域法 (bin-flip method)。对 $g_{\pm}(t)$ 取 z 的二阶近似, 则对式 4.4 有

$$p_b(t; D^0) \propto \Gamma e^{-\Gamma t} \left[F_b + \Gamma t \sqrt{F_b F_{-b}} \operatorname{Re}(X_b z) + F_b \frac{1}{4} (\Gamma t)^2 \operatorname{Re}(z^2) + F_{-b} \frac{1}{4} |z|^2 (\Gamma t)^2 + O((z\Gamma t)^3) \right] \quad . \quad (4.9)$$

将式 4.9 的 t 分布离散化, 分成多个区间。则对第 j 个 t 区间的事例数有

$$N_b(j; D^0) \propto F_b \left[1 + \frac{1}{4} \Gamma^2 \langle t^2 \rangle_j \operatorname{Re}(z^2) \right] + \frac{1}{4} F_{-b} \Gamma^2 \langle t^2 \rangle_j \left| \frac{q}{p} \right|^2 |z|^2 + \Gamma \langle t \rangle_j \sqrt{F_b F_{-b}} \operatorname{Re} \left(\frac{q}{p} X_b z \right) \quad , \quad (4.10)$$

其中 $\langle t \rangle_j$ 和 $\langle t^2 \rangle_j$ 分别为 t 和 t^2 在第 j 个区间内的平均值。达利兹图区间 b 和 $-b$ 的事例数的比值为

$$R_{bj} = \frac{r_b \left[1 + \frac{1}{4} \Gamma^2 \langle t^2 \rangle_j \operatorname{Re}(z^2) \right] + \frac{1}{4} \Gamma^2 \langle t^2 \rangle_j \left| \frac{q}{p} \right|^2 |z|^2 + \Gamma \langle t \rangle_j \sqrt{r_b} \operatorname{Re} \left(\frac{q}{p} X_b^* z \right)}{1 + \frac{1}{4} \Gamma^2 \langle t^2 \rangle_j \operatorname{Re}(z^2) + \frac{1}{4} r_b \Gamma^2 \langle t^2 \rangle_j \left| \frac{q}{p} \right|^2 |z|^2 + \Gamma \langle t \rangle_j \sqrt{r_b} \operatorname{Re} \left(\frac{q}{p} X_b z \right)} \quad , \quad (4.11)$$

其中 $r_b = F_{-b}/F_b$ 。若 t 分成 M 个区间, 达利兹图分成对称的 16 个区间, 则一共有 $8 \times M$ 个 R_{bj} , 同时拟合这些 R_{bj} 即可提取出 x , y 和 q/p 。由于 $|q/p|$ 和 ϕ 的误差不是标准的高斯分布, 故实际拟合中将其转化为 $z_{CP} \pm \Delta z \equiv (q/p)^{\pm 1} z$, $\Delta z = -(\Delta y + i\Delta x)$, 再带入式 4.11 拟合。拟合时忽略时间分辨率。忽略时间分辨率带来的影响在系统误差中考虑。LHCb 的时间分辨非常好, 此项系统误差很小。相比第一种方法, 第二种方法可用对称区域的比值抵消部分由达利兹图重建效率带来的误差; 第二种方法无需描述含时本底的分布, 本底分析比第一种方法简单。

^①物理本质类似衰变时间的误差。

4.3 本工作使用的模型无关测量方法

本文使用的模型无关测量方法与 LHCb 的第一种方法^[41]类似。区别在于：一、本文不对 $g_{\pm}(t)$ 进行任何的近似；二、本文用对称达利兹图区间的事例数之比 (式 4.37) 加强对拟合的约束。

对式 4.4 进行归一化，得

$$p_b(t; D^0) = \frac{|g_+(t)|^2 + r_b \left| \frac{q}{p} \right|^2 |g_-(t)|^2 + 2\sqrt{r_b} \text{Re}[X_b \frac{q}{p} g_+^*(t) g_-(t)]}{I_+(t) + r_b \left| \frac{q}{p} \right|^2 I_-(t) + 2\sqrt{r_b} \text{Re}[X_b \frac{q}{p} I_{+-}(t)]}, \quad (4.12)$$

其中 $r_b = F_{-b}/F_b$ 为 $t=0$ 时刻对称的达利兹图区间的衰变率之比^①。对 $g_{\pm}(t)$ 有^②

$$|g_+(t)|^2 = \theta(t) \frac{e^{-\Gamma t}}{4} \times (e^{-y\Gamma t} + e^{-ix\Gamma t} + e^{ix\Gamma t} + e^{y\Gamma t}), \quad (4.13)$$

$$|g_-(t)|^2 = \theta(t) \frac{e^{-\Gamma t}}{4} \times (e^{-y\Gamma t} - e^{-ix\Gamma t} - e^{ix\Gamma t} + e^{y\Gamma t}), \quad (4.14)$$

$$g_+^*(t)g_-(t) = \theta(t) \frac{e^{-\Gamma t}}{4} \times (e^{-y\Gamma t} + e^{-ix\Gamma t} - e^{ix\Gamma t} - e^{y\Gamma t}), \quad (4.15)$$

$$I_+ = \int_{-\infty}^{\infty} |g_+(t)|^2 dt, \quad I_- = \int_{-\infty}^{\infty} |g_-(t)|^2 dt, \quad I_{+-} = \int_{-\infty}^{\infty} g_+^*(t)g_-(t) dt. \quad (4.16)$$

实际分析中，需要考虑衰变时间的测量误差 σ_t 。每个事例的 σ_t 不一定相同。 (t, σ_t) 的二维分布可用 σ_t 的分布 $\text{pdf}_{\text{sig}}(\sigma_t; b)$ ^③ 和条件概率 $\text{pdf}_{\text{sig}}(t|\sigma_t; D^0, b)$ 构造

$$\begin{aligned} \text{pdf}_{\text{sig}}(t, \sigma_t; D^0, b) &= \text{pdf}_{\text{sig}}(t|\sigma_t; D^0, b) \text{pdf}_{\text{sig}}(\sigma_t; b) \\ &\propto [p_b(t; D^0) \otimes R(t|\sigma_t)] \text{pdf}_{\text{sig}}(\sigma_t; b). \end{aligned} \quad (4.17)$$

条件概率 $\text{pdf}_{\text{sig}}(t|\sigma_t; D^0, b)$ 由 $p_b(t; D^0)$ 和分辨函数 $R(t|\sigma_t)$ 卷积得到。分辨函数 $R(t|\sigma_t)$ 用多高斯分布构造

$$R(t|\sigma_t) = \sum_{i=1}^n f_i G(t, \mu_i, \sigma_i) \quad (4.18)$$

其中 f_i , μ_i 和 σ_i 分别为第 i 个高斯的比例，中心值和宽度。 σ_i 随 σ_t 变化

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= s_1 \sigma_t + s_{11} \sigma_t^2, \\ \sigma_i &= s_i \sigma_1 \quad \text{for } i > 1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

^①注意 r_b 并不是对时间积分后对称的达利兹图区间的衰变率之比，后者需要考虑 $D^0-\bar{D}^0$ 混合。

^②此处不对 $g_{\pm}(t)$ 进行任何近似。

^③不同达利兹图区间的 σ_t 分布不同，故用 $\text{pdf}_{\text{sig}}(\sigma_t; b)$ 表示。

对式 4.17 有

$$\begin{aligned} \text{pdf}_{\text{sig}}(t, \sigma_i; D^0, b) &= \text{pdf}_{\text{sig}}(t|\sigma_i; D^0, b) \text{pdf}_{\text{sig}}(\sigma_i; b) \\ &= \left[\frac{\sum_i f_i p_b(t; D^0) \otimes G(t, \mu_i, \sigma_i)}{\mathcal{N}_b(D^0)} \right] \text{pdf}_{\text{sig}}(\sigma_i; b) \quad , \end{aligned} \quad (4.20)$$

$\mathcal{N}_b(D^0)$ 为归一化因子。当分辨率函数为单高斯分布时，中括号内的分式可写成式 4.21 的形式^①。

$$\frac{p_b(t; D^0) \otimes G(t, \mu, \sigma)}{\mathcal{N}_b(D^0)} = \frac{k_+(t) + r_b |\frac{q}{p}|^2 k_-(t) + 2\sqrt{r_b} \text{Re}[X_b \frac{q}{p} g_+^*(t) g_-(t)]}{K_+(t) + r_b |\frac{q}{p}|^2 K_-(t) + 2\sqrt{r_b} \text{Re}[X_b \frac{q}{p} K_{+-}(t)]} \quad . \quad (4.21)$$

式 4.21 中，

$$k_+(t) = |g_+(t)|^2 \otimes G(t, \mu, \sigma) \quad (4.22)$$

$$= 1/4 \times (\psi(\chi, \kappa_+) + \psi(\chi, \kappa_{+i}) + \psi(\chi, \kappa_{-i}) + \psi(\chi, \kappa_-)) \quad ,$$

$$k_-(t) = |g_-(t)|^2 \otimes G(t, \mu, \sigma) \quad (4.23)$$

$$= 1/4 \times (\psi(\chi, \kappa_+) - \psi(\chi, \kappa_{+i}) - \psi(\chi, \kappa_{-i}) + \psi(\chi, \kappa_-)) \quad ,$$

$$k_{+-}(t) = g_+^*(t) g_-(t) \otimes G(t, \mu, \sigma) \quad (4.24)$$

$$= 1/4 \times (\psi(\chi, \kappa_+) + \psi(\chi, \kappa_{+i}) - \psi(\chi, \kappa_{-i}) - \psi(\chi, \kappa_-)) \quad ,$$

$$K_+ = \int_{-\infty}^{\infty} k_+(t) dt, \quad K_- = \int_{-\infty}^{\infty} k_-(t) dt, \quad K_{+-} = \int_{-\infty}^{\infty} k_{+-}(t) dt \quad , \quad (4.25)$$

其中 $\psi(\chi, \kappa)$ 为 $e^{-(1 \pm y)\Gamma t}$ 或 $e^{-(1 \pm ix)\Gamma t}$ 与单高斯分布的卷积^[110]

$$\psi(\chi, \kappa) = \frac{1}{2} e^{\frac{\kappa^2 - 2\chi\kappa}{2}} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{\chi - \kappa}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad , \quad (4.26)$$

$$\chi = \frac{t - \mu}{\sigma}, \quad \kappa_{\pm} = (1 \pm y)\Gamma\sigma, \quad \kappa_{\pm i} = (1 \pm ix)\Gamma\sigma.$$

实际分析中，还需考虑本底。整体的概率分布函数如下

$$\begin{aligned} \text{pdf}_0(t, \sigma_i; D^0, b) &= f_{\text{sig}}(D^0, b) \text{pdf}_{\text{sig}}(t, \sigma_i; D^0, b) \\ &\quad + f_{\text{rnd}}(D^0, b) \text{pdf}_{\text{rnd}}(t, \sigma_i; D^0, b) \\ &\quad + (1 - f_{\text{sig}}(D^0, b) - f_{\text{rnd}}(D^0, b)) \text{pdf}_{\text{oth}}(t, \sigma_i; b) \quad , \end{aligned} \quad (4.27)$$

其中 $f_k(D^0, b)$, $k = \text{sig}, \text{rnd}, \text{oth}$ 为在 $M(D^0)$ - Q 信号区间 (见章节 3.2) 成分 k 的占比。

^①实际分析中的分辨率函数为双高斯函数， $\text{pdf}_{\text{sig}}(t, \sigma_i; D^0, b)$ 的推导过程与文中类似。

pdf_{rnd} 为随机 π 介子本底分布。这种本底事例中, D^0 重建正确, D^{*+} 重建错误。此时部分 D^0 的味道无法被正确标记, 其占比为 f_{mistag} , 则^[41]

$$\text{pdf}_{\text{rnd}}(t, \sigma_t; D^0, b) = \frac{(1 - f_{\text{mistag}})\mathcal{N}_b(D^0)\text{pdf}_{\text{sig}}(t, \sigma_t; D^0, b) + f_{\text{mistag}}\mathcal{N}_{-b}(\bar{D}^0)\text{pdf}_{\text{sig}}(t, \sigma_t; \bar{D}^0, -b)}{(1 - f_{\text{mistag}})\mathcal{N}_b(D^0) + f_{\text{mistag}}\mathcal{N}_{-b}(\bar{D}^0)}, \quad (4.28)$$

其中 $\mathcal{N}_b(D^0)$ 为式 4.21 中的归一化因子。

pdf_{oth} 为其他本底的分布。这种本底事例中, D^0 重建错误。本工作假设此类本底在 D^0 和 $\bar{D}^0$ 样本中分布相同, 在不同达利兹图区域分布不同。

$$\text{pdf}_{\text{oth}}(t, \sigma_t; b) = \text{pdf}_{\text{oth}}(t|\sigma_t; b)\text{pdf}_{\text{oth}}(\sigma_t; b) \quad . \quad (4.29)$$

用一个无寿命成分和最多两个长寿命成分描述这种本底。

$$\begin{aligned} \text{pdf}_{\text{oth}}(t|\sigma_t; b) &= (1 - f_{\text{bl}})R(t|\sigma_t; \mu_{\text{oth}}) + f_{\text{bl}}(f_{\text{bl1}}\text{pdf}_{\text{bl1}}(t|\sigma_t; \mu_{\text{oth}}, \tau_{\text{bl1}}) \\ &\quad + (1 - f_{\text{bl1}})\text{pdf}_{\text{bl2}}(t|\sigma_t; \mu_{\text{oth}}, \tau_{\text{bl2}})) \quad . \end{aligned} \quad (4.30)$$

$\text{pdf}_{\text{oth}}(t|\sigma_t; b)$ 在每个达利兹图区间都不同。式 4.30 中的 f_{bl} , f_{bl1} , μ_{oth} , τ_{bl1} 和 τ_{bl2} 实际上为 $f_{\text{bl}}(b)$, $f_{\text{bl1}}(b)$, $\mu_{\text{oth}}(b)$, $\tau_{\text{bl1}}(b)$ 和 $\tau_{\text{bl2}}(b)$ 。时间分辨函数

$$R(t|\sigma_t; \mu_{\text{oth}}) = \sum_i f_i G(t, \mu_i + \mu_{\text{oth}}, s_i \sigma_t) \quad . \quad (4.31)$$

对长寿命成分有

$$\begin{aligned} \text{pdf}_{\text{bl1}}(t|\sigma_t; \mu_{\text{oth}}, \tau_{\text{bl1}}) &= \frac{1}{\tau_{\text{bl1}}} e^{-t/\tau_{\text{bl1}}} \otimes R(t|\sigma_t; \mu_{\text{oth}}) \\ &= \sum_i f_i \frac{1}{\tau_{\text{bl1}}} e^{-t/\tau_{\text{bl1}}} \otimes G(t, \mu_i + \mu_{\text{oth}}, s_i \sigma_t) \quad , \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \text{pdf}_{\text{bl2}}(t|\sigma_t; \mu_{\text{oth}}, \tau_{\text{bl2}}) &= \frac{1}{\tau_{\text{bl2}}} e^{-t/\tau_{\text{bl2}}} \otimes R(t|\sigma_t; \mu_{\text{oth}}) \\ &= \sum_i f_i \frac{1}{\tau_{\text{bl2}}} e^{-t/\tau_{\text{bl2}}} \otimes G(t, \mu_i + \mu_{\text{oth}}, s_i \sigma_t) \quad , \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$(4.34)$$

其中

$$e^{-t/\tau} \otimes G(t, \mu, s\sigma_t) = \psi\left(\frac{t - \mu}{s\sigma_t}, s\sigma_t/\tau\right) \quad . \quad (4.35)$$

用对称达利兹图区间的总事例数之比 C_b 约束 r_b 。对 C_b 有^①

$$\begin{aligned} C_b(D^0) &= \frac{N(D^0, -b)}{N(D^0, b)} = \frac{N_{\text{sig}}(D^0, -b)/f_{\text{sig}}(D^0, -b)}{N_{\text{sig}}(D^0, b)/f_{\text{sig}}(D^0, b)} \\ &= \frac{\mathcal{N}_{-b}(D^0)}{\mathcal{N}_b(D^0)} \times \frac{f_{\text{sig}}(D^0, b)}{f_{\text{sig}}(D^0, -b)}, \quad b > 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

其中 $\mathcal{N}_b(D^0)$ 为式 4.21 的归一化因子，与 r_b 有关。

考虑 C_b 后，整体的概率分布函数为

$$\text{pdf}(t, \sigma_t; D^0, b) = \begin{cases} \left[\frac{1}{1 + C_b(D^0)} \right] \text{pdf}_0(t, \sigma_t; D^0, b), & b > 0 \\ \left[\frac{C_{|b|}(D^0)}{1 + C_{|b|}(D^0)} \right] \text{pdf}_0(t, \sigma_t; D^0, b), & b < 0 \end{cases}. \quad (4.37)$$

本工作首先用 $M(D^0)\text{-}Q$ 二维拟合提取 $f_{\text{sig}}(D^0, b)$, $f_{\text{rnd}}(D^0, b)$ 和 $f_{\text{oth}}(D^0, b)$ 。用式 4.37 同时拟合 D^0 和 $\bar{D}^0$ 的 16 个达利兹图区间，提取混合参数。

^① $C_b(D^0)$ 也可用 f_{rnd} 表达。用 Q 边带区数据测量 f_{mistag} 时 (章节 6)，需要使用这种形式：

$$\begin{aligned} C_b(D^0) &= \frac{N_{\text{rnd}}(D^0, -b)}{N_{\text{rnd}}(D^0, b)} \times \frac{f_{\text{rnd}}(D^0, b)}{f_{\text{rnd}}(D^0, -b)} \\ &= \frac{(1 - f_{\text{mistag}})\mathcal{N}_{-b}(D^0) + f_{\text{mistag}}\mathcal{N}_b(\bar{D}^0)}{(1 - f_{\text{mistag}})\mathcal{N}_b(D^0) + f_{\text{mistag}}\mathcal{N}_{-b}(\bar{D}^0)} \times \frac{f_{\text{rnd}}(D^0, b)}{f_{\text{rnd}}(D^0, -b)} \end{aligned}$$

第 5 章 在达利兹图的不同区间内确定信号和本底事例数

5.1 信号与本底的参数化

在 D^{*+} 和 D^{*-} 样本^①的每个达利兹图区间，用式 5.1 拟合 $M(D^0)$ - Q 二维分布，提取信号和随机 π 介子本底的比例。

$$\text{pdf}(M, Q) = r_{\text{sig}}\text{pdf}_{\text{sig}}(M, Q) + r_{\text{rnd}}\text{pdf}_{\text{rnd}}(M, Q) + (1 - r_{\text{sig}} - r_{\text{rnd}})\text{pdf}_{\text{oth}}(M, Q) \quad (5.1)$$

式 5.1 中， r_{sig} 和 r_{rnd} 为信号和随机 π 介子本底在整个拟合区间 $1.8 < M(D^0) < 2.0 \text{ GeV}/c^2$ 和 $0.2 < Q < 20.0 \text{ MeV}$ 上的比例。对拟合结果进行积分，可得信号和随机 π 介子本底在 $M(D^0)$ - Q 信号区间的比例 f_{sig} 和 f_{rnd} (式 4.27)。

信号的概率分布函数

$$\text{pdf}_{\text{sig}}(M, Q) = \text{pdf}_{\text{sig}}(M) \times \text{pdf}_{\text{oth}}(Q|M) \quad (5.2)$$

其中 $M(D^0)$ 分布用 Crystal Ball (CB) 函数 (见附录 E.3) 和两个高斯分布 (G) 描述

$$\begin{aligned} \text{pdf}_{\text{sig}}(M) = \frac{1}{\mathcal{N}} \{ & f_c \times \text{CB}(M, \mu_M, \sigma_{Mc}, \alpha_{Mc}, N_{Mc}) \\ & + (1 - f_c) \times [f_1 G(M, \mu_M, \sigma_{M1}) + (1 - f_1) G(M, \mu_M, \sigma_{M2})] \} \quad (5.3) \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{N}$ 为归一化因子。 Q 的条件概率分布用 J_{S_U} 分布 (见附录 E.3) 和两个高斯分布描述。其中一个高斯分布的宽度随 $M(D^0)$ 变化。

$$\begin{aligned} \text{pdf}_{\text{sig}}(Q|M) = \frac{1}{\mathcal{N}} \{ & f_u [J_{S_U}(Q, \mu_Q, \gamma, \delta, \lambda) + G(Q, \mu_{Qg}, \sigma_{Qg})] \\ & + (1 - f_u) G(Q, \mu_{Qc}, \sigma_{Qc}(1 + c_1(M - \mu_M)^2)) \} \quad (5.4) \end{aligned}$$

其他本底的概率分布函数

$$\text{pdf}_{\text{oth}}(M, Q) = \text{pdf}_{\text{oth}}(M) \times \text{pdf}_{\text{oth}}(Q) \quad (5.5)$$

其中 $M(D^0)$ 的概率分布用三阶多项式描述^②

$$\text{pdf}_{\text{oth}}(M) = \frac{1}{\mathcal{N}} \left\{ \sum_{n=0}^3 k_n (M - 1.8)^n \right\} \quad (5.6)$$

Q 分布用阈值函数描述

$$\text{pdf}_{\text{oth}}(Q) = \frac{1}{\mathcal{N}} \{ Q^{1/2} + \alpha_{\text{oth}} Q^{3/2} + \beta_{\text{oth}} Q^{5/2} \} \quad (5.7)$$

^① D^{*+} 和 D^{*-} 样本的信号本底比例略有不同。

^② 在某些达利兹图区间，仅用一阶或二阶多项式描述。

随机 π 介子本底的 $M(D^0)$ 分布与 $\text{pdf}_{\text{sig}}(M)$ 相同，共享所有参数。 Q 分布与 $\text{pdf}_{\text{oth}}(Q)$ 有相同的形式

$$\text{pdf}_{\text{rnd}}(Q) = \frac{1}{\mathcal{N}} \{ Q^{1/2} + \alpha_{\text{rnd}} Q^{3/2} + \beta_{\text{rnd}} Q^{5/2} \} \quad . \quad (5.8)$$

$\text{pdf}_{\text{rnd}}(Q)$ 和 $\text{pdf}_{\text{oth}}(Q)$ 不共享参数。

拟合共分成四步^{①②}。

第一步：仅拟合达利兹图区间 +1，浮动式 5.1 中所有参数。目的是获取初始的信号分布形状。

第二步：拟合所有达利兹图区间 b ，固定信号和本底的形状，仅浮动 $r_{\text{sig}}(b)$ 和 $r_{\text{rnd}}(b)$ 。目的是得到初始的 $r_{\text{sig}}(b)$ 和 $r_{\text{rnd}}(b)$ 。

第三步：浮动信号和本底形状的拟合。拟合所有达利兹图区间 b 。 r_{sig} 和 r_{rnd} 浮动，根据第二步拟合结果设置初值。本底形状的所有参数浮动。对于信号，仅浮动“形变参数”和“位移参数”，其他参数固定。假设所有达利兹图区间的信号形状均可由达利兹图区间 +1 的信号形状 (第一步拟合的结果) 经形变和位移得到。形变参数 ($s_M(b)$, $s_Q(b)$) 和位移参数 ($\delta\mu_M(b)$, $\delta\mu_Q(b)$) 定义如下：

$$\begin{aligned} \text{pdf}'_{\text{sig}}(M) &= R \cdot \text{pdf}_{\text{sig}}(s_M(b)M + \delta\mu_M(b)) \quad , \\ \text{pdf}'_{\text{sig}}(Q|M) &= R \cdot \text{pdf}_{\text{sig}}(s_Q(b)Q + \delta\mu_Q(b)) \quad , \end{aligned}$$

其中， pdf' 为 pdf 形变和位移后的分布。 R 为 pdf 和 pdf' 的归一化因子之比。详见附录 E.2。对信号和随机 π 介子本底的分布有

$$\begin{aligned} \text{pdf}'_{\text{sig}}(M, Q) &= R \cdot \text{pdf}_{\text{sig}}(s_M(b)M + \delta\mu_M(b), s_Q(b)Q + \delta\mu_Q(b)) \quad , \\ \text{pdf}'_{\text{rnd}}(M, Q) &= R \cdot \text{pdf}_{\text{rnd}}(s_M(b)M + \delta\mu_M(b), Q) \quad . \end{aligned} \quad (5.9)$$

第四步：计算 $f_{\text{sig}}(b)$ 和 $f_{\text{rnd}}(b)$ 。在达利兹图区间 b ，根据第三步拟合的结果对 $\text{pdf}(M, Q)$ 在 $M(D^0)$ - Q 信号区间积分，得 $f_{\text{sig}}(b)$ 和 $f_{\text{rnd}}(b)$ 。

5.2 Generic MC 样本拟合

Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ generic MC 的拟合结果如图 5.1 所示。图中分别展示了 D^{*+} 和 D^{*-} 候选者的拟合结果。点表示全达利兹图的候选者，蓝直方图表示所有达利兹图区间的信号和本底的拟合函数之和。随机 π 介子本底和其他本底用不同的阴影线直方图表示。每个达利兹图区间的拟合结果见附录 B.8.1。图 5.2-5.5 对比了拟合得到的 $f_{\text{sig}}(b)$, $f_{\text{rnd}}(b)$

^①为使得拟合容易收敛，将拟合分成了四步。拟合时考虑了不同达利兹图区间的信号 $M(D^0)$ - Q 分布是相似的。

^②所有拟合均为 unbinned 拟合。

和 MC Match^[111]得到的 $f_{\text{sig}}(b)$, $f_{\text{rnd}}(b)$ 。前者用点表示, 后者用直方图表示。在一些达利兹图区间间, 拟合结果与 MC Match 结果的差别大于 5 倍误差^①。然而, 差别的绝对值在千分之一量级。这种差别对混合参数测量的影响有限 (详见章节 6)。

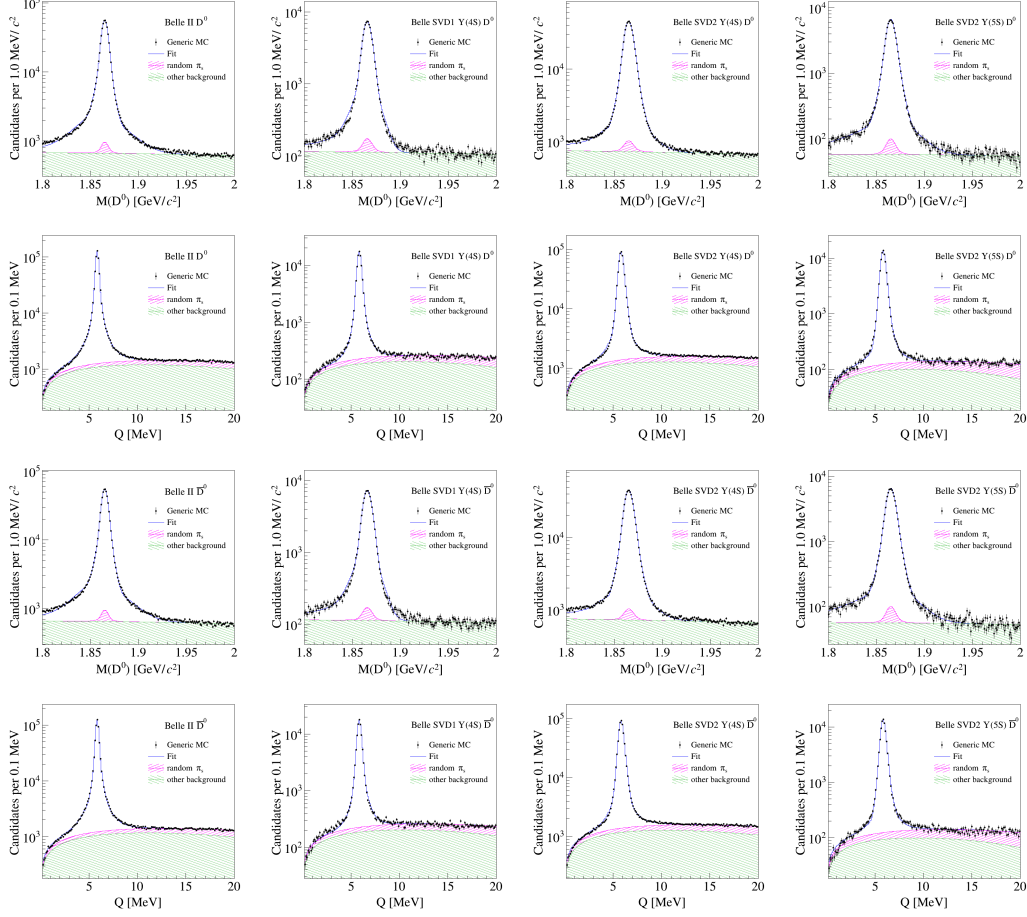
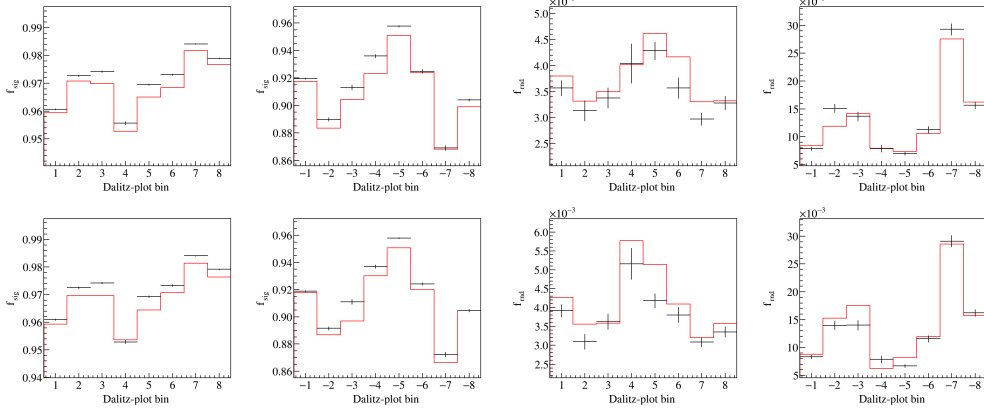


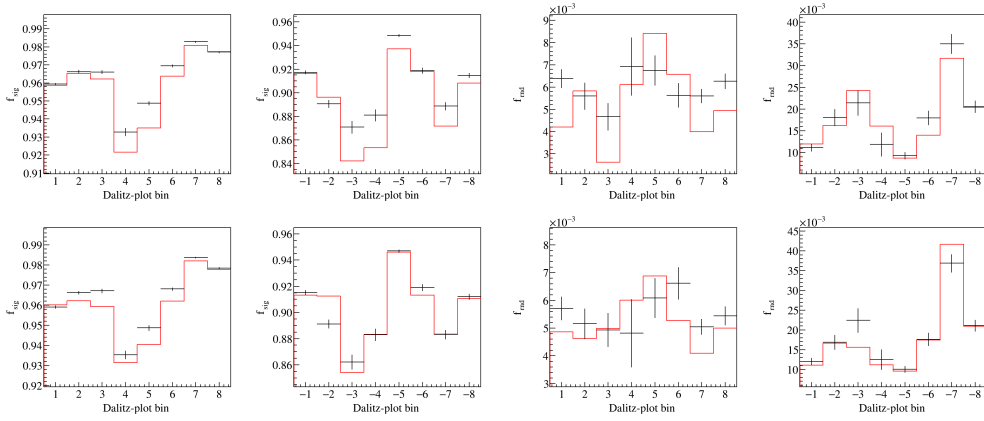
图 5.1 Belle 和 Belle II generic MC $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

Belle 和 Belle II generic MC $M(D^0)$ - Q 二维拟合中第三步拟合的结果。点表示全达利兹图的候选者, 蓝直方图表示所有达利兹图区间的信号和本底的拟合函数之和。随机 π 介子本底和其他本底用不同的阴影线直方图表示。

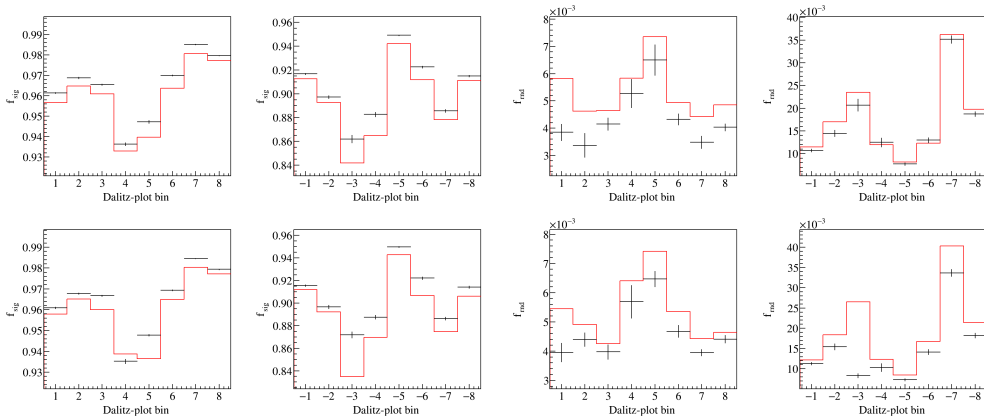
^① $f_{\text{sig}}(b)$ 和 $f_{\text{rnd}}(b)$ 的误差基于拟合参数的误差给出。


 图 5.2 拟合得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 与 MC match 的对比 (Belle II MC15 generic MC)。

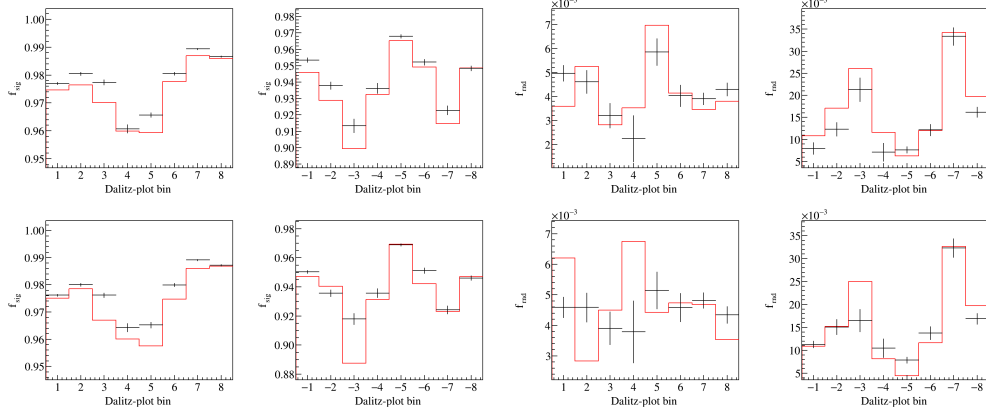
点为拟合结果，直方图为用 MC Match 得到的值。横轴表示达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$ ， $i = 1, 2, \dots, 8$ 。第一行为 D^{*+} 候选者拟合结果，第二行为 D^{*-} 候选者拟合结果。


 图 5.3 拟合得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 与 MC match 的对比 (Belle SVD1 $Y(4S)$ generic MC)。

点为拟合结果，直方图为用 MC Match 得到的值。横轴表示达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$ ， $i = 1, 2, \dots, 8$ 。第一行为 D^{*+} 候选者拟合结果，第二行为 D^{*-} 候选者拟合结果。


 图 5.4 拟合得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 与 MC match 的对比 (Belle SVD2 $Y(4S)$ generic MC)。

点为拟合结果，直方图为用 MC Match 得到的值。横轴表示达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$ ， $i = 1, 2, \dots, 8$ 。第一行为 D^{*+} 候选者拟合结果，第二行为 D^{*-} 候选者拟合结果。


 图 5.5 拟合得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 与 MC match 的对比 (Belle SVD2 $Y(5S)$ generic MC)。

点为拟合结果，直方图为用 MC Match 得到的值。横轴表示达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$ ， $i = 1, 2, \dots, 8$ 。第一行为 D^{*+} 候选者拟合结果，第二行为 D^{*-} 候选者拟合结果。

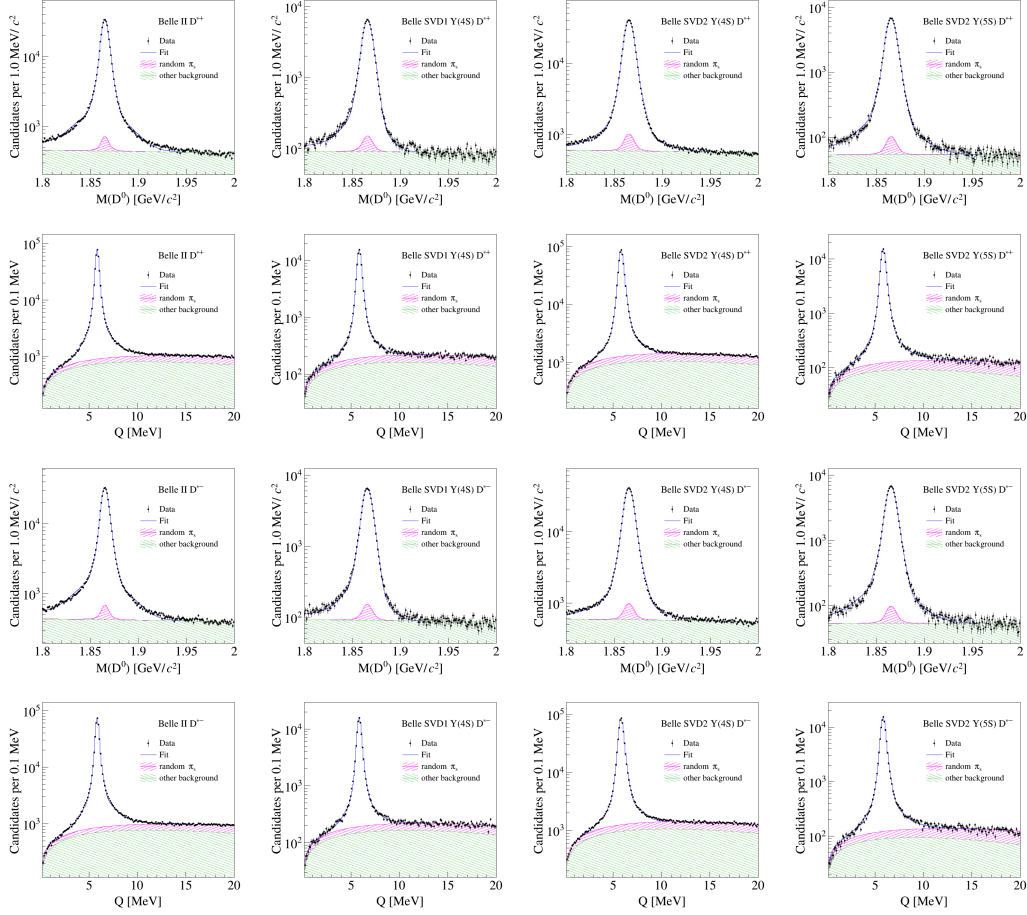
5.3 实验数据拟合

Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 数据的拟合结果如图 5.6 所示。图中分别展示了 D^{*+} 和 D^{*-} 候选者的拟合结果。点表示全达利兹图的候选者，蓝直方图表示所有达利兹图区间的信号和本底的拟合函数之和。随机 π 介子本底和其他本底用不同的阴影线直方图表示。每个达利兹图区间的拟合结果见附录 B.8.2。拟合得到的 $f_{\text{sig}}(b)$ 和 $f_{\text{rnd}}(b)$ 如图^① 5.7-5.10 所示。表 5.1 列出了各数据集所有达利兹图区间的信号事例数之和，以及达利兹图的平均纯度 (信号占比)。Belle 和 Belle II 的总信号事例数为 2.049×10^6 ，平均纯度为 95.8%。

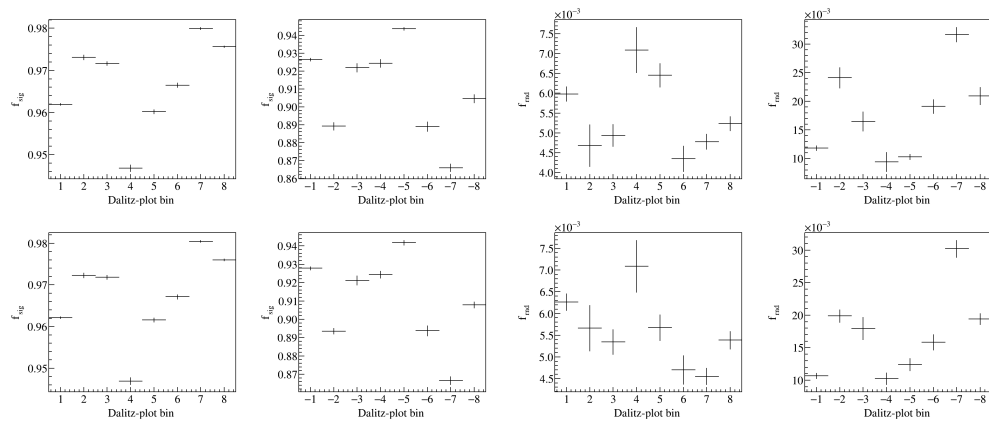
表 5.1 各数据集的信号事例数和平均纯度。

	信号事例数 [$\times 10^6$]	平均纯度 [%]
Belle SVD1 $Y(4S)$	0.163	95.9
Belle SVD2 $Y(4S)$	1.014	95.7
Belle SVD2 $Y(5S)$	0.176	97.5
Belle II	0.697	95.6
总和	2.049	95.8

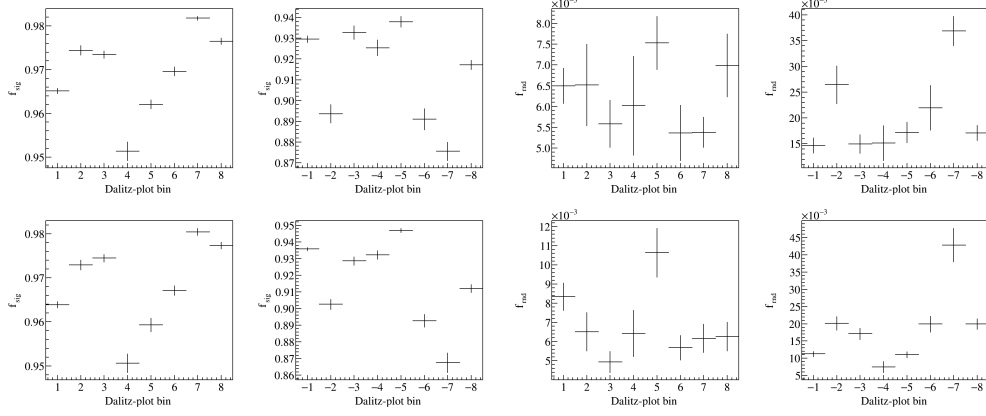
^①图中的误差由拟合参数的误差传递给出。


 图 5.6 Belle 和 Belle II 数据 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

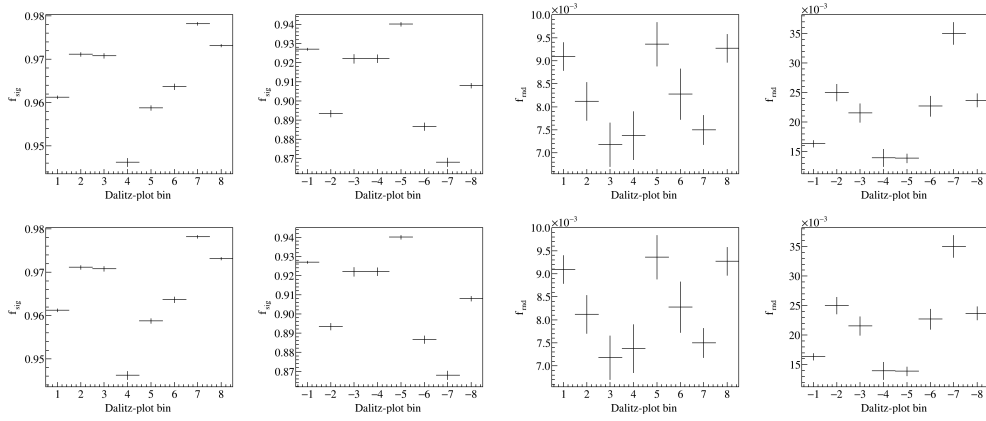
Belle 和 Belle II 数据 $M(D^0)$ - Q 二维拟合中第三步拟合的结果。点表示全达利兹图的候选者，蓝直方图表示所有达利兹图区间的信号和本底的拟合函数之和。随机 π 介子本底和其他本底用不同的阴影线直方图表示。


 图 5.7 拟合 Belle II 数据得到的 f_{sig} 和 f_{rnd} 。

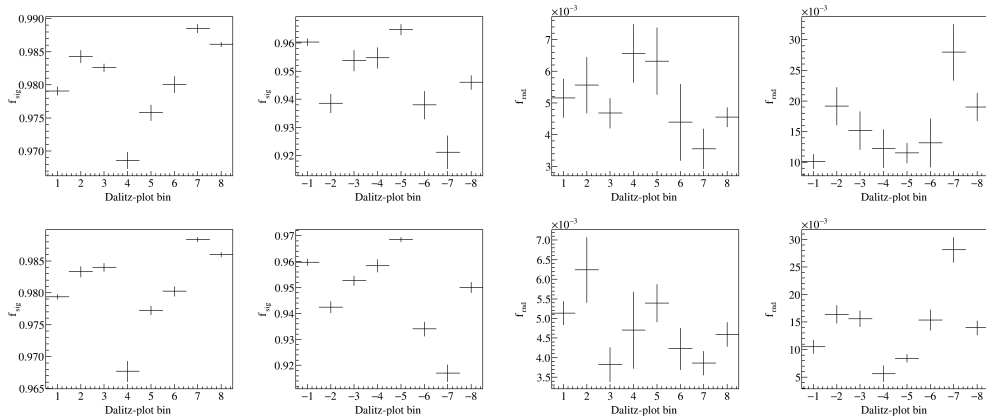
横轴表示达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 。第一行为 D^{*+} 候选者拟合结果，第二行为 D^{*-} 候选者拟合结果。


 图 5.8 拟合 Belle SVD1 $Y(4S)$ 数据得到的 f_{sig} 和 f_{md} 。

横轴表示达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 。第一行为 D^{*+} 候选者拟合结果, 第二行为 D^{*-} 候选者拟合结果。


 图 5.9 拟合 Belle SVD2 $Y(4S)$ 数据得到的 f_{sig} 和 f_{md} 。

横轴表示达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 。第一行为 D^{*+} 候选者拟合结果, 第二行为 D^{*-} 候选者拟合结果。


 图 5.10 拟合 Belle SVD2 $Y(5S)$ 数据得到的 f_{sig} 和 f_{md} 。

横轴表示达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 。第一行为 D^{*+} 候选者拟合结果, 第二行为 D^{*-} 候选者拟合结果。

第6章 含时拟合

D^0 衰变时间的计算公式为

$$t = \frac{lm_{D^0}}{pc} \quad , \quad (6.1)$$

其中, m_{D^0} 为 D^0 质量 PDG 值, c 为光速。 l 为根据第一次 TreeFitter 拟合的顶点得到的 D^0 飞行距离。 p 为第一次 TreeFitter 拟合的 D^0 动量。衰变时间的误差 σ_t 根据 l 和 p 的误差给出。

通过同时拟合 Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(5S)$ 和 BelleII 数据 D^0 和 $\bar{D}^0$ 样本的 (t, σ_t) 二维分布提取混合参数。 (t, σ_t) 分布由式 4.37 描述:

$$\text{pdf}(t, \sigma_t; D^0, b) = \begin{cases} \left[\frac{1}{1 + C_b(D^0)} \right] \text{pdf}_0(t, \sigma_t; D^0, b), & b > 0 \\ \left[\frac{C_{|b|}(D^0)}{1 + C_{|b|}(D^0)} \right] \text{pdf}_0(t, \sigma_t; D^0, b), & b < 0 \end{cases} .$$

其中, $C_b(D^0)$ 为对称区间总事例数之比。 pdf_0 由式 4.27 描述

$$\begin{aligned} \text{pdf}_0(t, \sigma_t; D^0, b) = & f_{\text{sig}}(D^0, b) \text{pdf}_{\text{sig}}(t, \sigma_t; D^0, b) \\ & + f_{\text{rnd}}(D^0, b) \text{pdf}_{\text{rnd}}(t, \sigma_t; D^0, b) \\ & + (1 - f_{\text{sig}}(D^0, b) - f_{\text{rnd}}(D^0, b)) \text{pdf}_{\text{oth}}(t, \sigma_t; b) \quad , \end{aligned}$$

其中, $f_{\text{sig}}(D^0, b)$ 和 $f_{\text{rnd}}(D^0, b)$ 已在章节 5 中得到。

本章节首先确定 $\text{pdf}_{\text{sig}}(t, \sigma_t; D^0, b)$, $\text{pdf}_{\text{rnd}}(t, \sigma_t; D^0, b)$ 和 $\text{pdf}_{\text{oth}}(t, \sigma_t; b)$ 的形式。然后进行含时拟合。步骤如下^①:

第一步: 确定 $\text{pdf}_{\text{sig}}(t, \sigma_t; D^0, b)$ 的形式。

$$\text{pdf}_{\text{sig}}(t, \sigma_t; D^0, b) = \text{pdf}_{\text{sig}}(t|\sigma_t; D^0, b) \text{pdf}_{\text{sig}}(\sigma_t; b) \propto [p(t; D^0, b) \otimes R(t|\sigma_t)] \text{pdf}_{\text{sig}}(\sigma_t; b) \quad .$$

$\text{pdf}_{\text{sig}}(t|\sigma_t; D^0, b)$ 中包含混合参数和分辨率函数的参数。这两者在含时拟合中保持浮动。分辨率函数由式 4.19 定义。对于 Belle II 数据集, 分辨率函数为双高斯分布, 其宽度随 σ_t 线性变化。对于 Belle 的三个数据集, 分辨率函数为双高斯分布, 宽度不随 σ_t 变化^②。

$\text{pdf}_{\text{sig}}(\sigma_t; b)$ 由数据在 $M(D^0)$ - Q 信号区的 σ_t 分布直方图减去 $M(D^0)$ 边带区的 Q 信号区的 σ_t 分布直方图得到。相减时, 两个分布的比例根据 $\text{pdf}(M, Q)$ 积分得到。

^① 以下的所有拟合为 unbinned 拟合。

^② 详见章节 3.4。

第二步：获取随机 π 介子本底的味道标记错误率。pdf_{rnd}($t, \sigma_t; D^0, b$) 是 pdf_{sig}($t, \sigma_t; D^0, b$) 和味道标记错误率 f_{mistag} 的组合。通过拟合 Q 边带区 ($15 < Q < 20 \text{ MeV}$) 的事例得到 f_{mistag} 。拟合中，混合参数 x 和 y 固定为零。此时， c_b 和 s_b 对 pdf_{rnd} 没有任何贡献。将 c_b 和 s_b 固定为常数。根据 Belle 和 BaBar 的模型^[112]固定 r_b 。 D^0 衰变寿命固定到 PDG 值 410.3 ps ^[10]。 D^0 衰变时间分辨率参数和 f_{mistag} 浮动。拟合得到 $f_{\text{mistag}} = (42.11 \pm 0.19)\%$ 。在第四步拟合中， f_{mistag} 固定到 42.11% 。

第三步：确定 pdf_{oth}($t, \sigma_t; b$) 的形式。pdf_{oth}($t, \sigma_t; b$) 由两部分组成：

$$\text{pdf}_{\text{oth}}(t, \sigma_t; b) = \text{pdf}_{\text{oth}}(t|\sigma_t; b)\text{pdf}_{\text{oth}}(\sigma_t; b) \quad ,$$

其中 pdf_{oth}($\sigma_t; b$) 用数据在 $M(D^0)$ 边带区和 Q 信号区的 σ_t 分布直方图表示。pdf_{oth}($t|\sigma_t; b$) 中所有的参数通过拟合 $M(D^0)$ 边带区和 Q 信号区的 (t, σ_t) 分布得到。后续拟合固定 pdf_{oth}($t|\sigma_t; b$) 的所有参数。

第四步：同时拟合 Belle 和 Belle II 实验数据，提取混合参数。用式 4.37 同时拟合 Belle SVD1 $Y(4S)$ ，Belle SVD2 $Y(4S)$ ，Belle SVD2 $Y(5S)$ 和 Belle II 实验数据 D^0 和 $\bar{D}^0$ 样本中每个达利兹图区间的 (t, σ_t) 二维分布。一个 D^0 或 $\bar{D}^0$ 样本有 16 个达利兹图区间，Belle 和 Belle II 数据中共有 $4 \times 2 \times 16 = 128$ 个达利兹图区间。拟合中浮动的参数如下：

- x, y ,
- 信号的衰变时间分辨率参数,
- r_b, c_b, s_b 。

D^0 衰变寿命在拟合时固定到 PDG 值 410.3 ps ^[10]。 r_b, c_b 和 s_b 的初值根据 BESIII 和 CLEO 结果^[106-107]设置。根据 BESIII 和 CLEO 的测量误差对 c_b 和 s_b 进行高斯约束 (Gaussian constraint)。 r_b 无额外约束。

6.1 Toy MC 样本拟合

基于 Toy MC 样本验证含时拟合的无偏性。

Toy MC 样本的产生方法如下。首先用 DAFNE 框架 (附录 A) 根据文献^[39]的振幅模型和自定义的 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合参数产生不含探测器模拟的样本。然后根据与 generic MC 样本分布相近的解析函数为样本加入时间分辨率和本底。假设效率处处相等，忽略达利兹图的分辨率。

对约 400 个 Toy MC 样本进行含时拟合。每个样本包含四个子样本，分别对应 Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$ ，Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 数据集，子样本的统计量约为实验数据的 1.1 倍。其中一个样本的拟合结果如图 6.1 所示。点表示全达利兹图的候选者，蓝直方图表示所有达利兹图区间的信号和本底的

拟合函数之和。随机 π 介子本底和其他本底用不同的阴影线直方图表示。每个达利兹图区间的拟合结果见附录 B.9.1。图 6.2 为所有 Toy MC 样本的拟合结果与 Toy MC 混合参数输入值的对比。图中还展示了拟合误差的分布和 pull 分布^①。400 个 Toy MC 样本的 x 拟合值的均值和标准差为 $(4.05 \pm 1.66) \times 10^{-3}$ ，输入值为 $x = 4.00 \times 10^{-3}$ 。 y 拟合值的均值和标准差为 $(5.93 \pm 1.36) \times 10^{-3}$ ，输入值为 $y = 6.00 \times 10^{-3}$ 。拟合值与输入值一致。含时拟合无偏。

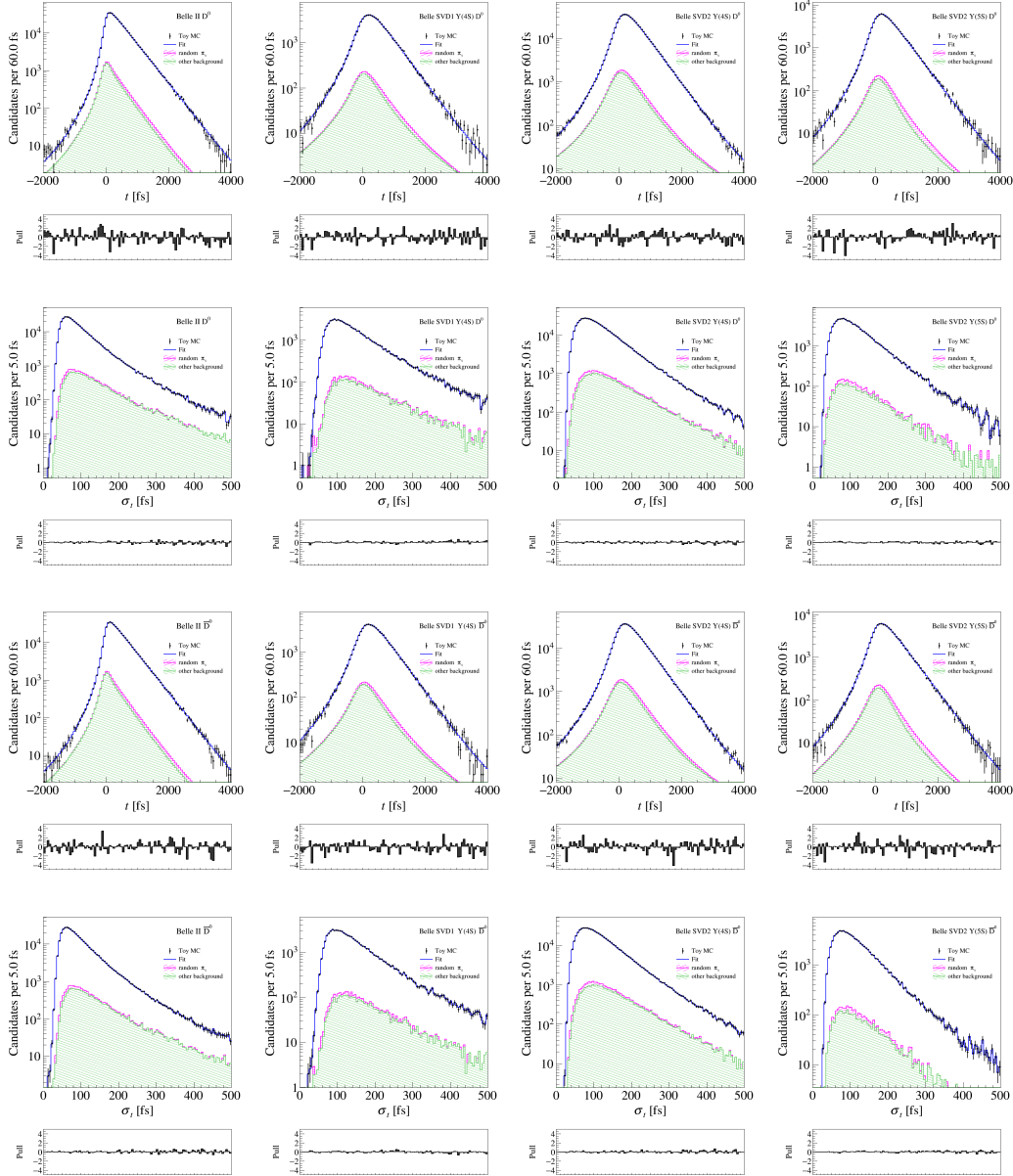


图 6.1 一个 Toy MC 样本的含时拟合结果。

点表示全达利兹图的候选者，蓝直方图表示所有达利兹图区间的信号和本底的拟合函数之和。随机 π 介子本底和其他本底用不同的阴影线直方图表示。

^①即拟合值与输入值之差除以拟合误差， $\text{pull} = \frac{v_{\text{fit}} - v_{\text{input}}}{\sigma_v}$ 。

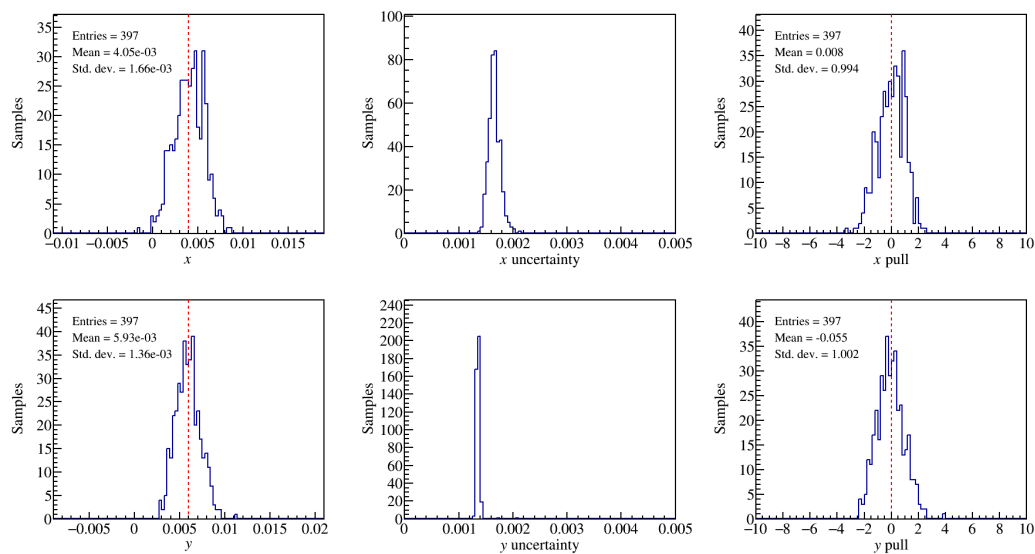


图 6.2 Toy MC 的混合参数拟合值分布。

左图对比了约 400 个 Toy MC 样本的混合参数拟合值和输入值。输入值 ($x = 0.004$, $y = 0.006$) 用虚线标出。拟合值与输入值一致。中图为拟合误差的分布, 右图为 pull 分布。

6.2 实验数据拟合

Belle 和 Belle II 数据的联合拟合结果如图 6.3 所示。点表示全达利兹图的候选者，蓝直方图表示所有达利兹图区间的信号和本底的拟合函数之和。随机 π 介子本底和其他本底用不同的阴影线直方图表示。每个达利兹图区间的拟合结果见附录 B.9.2。

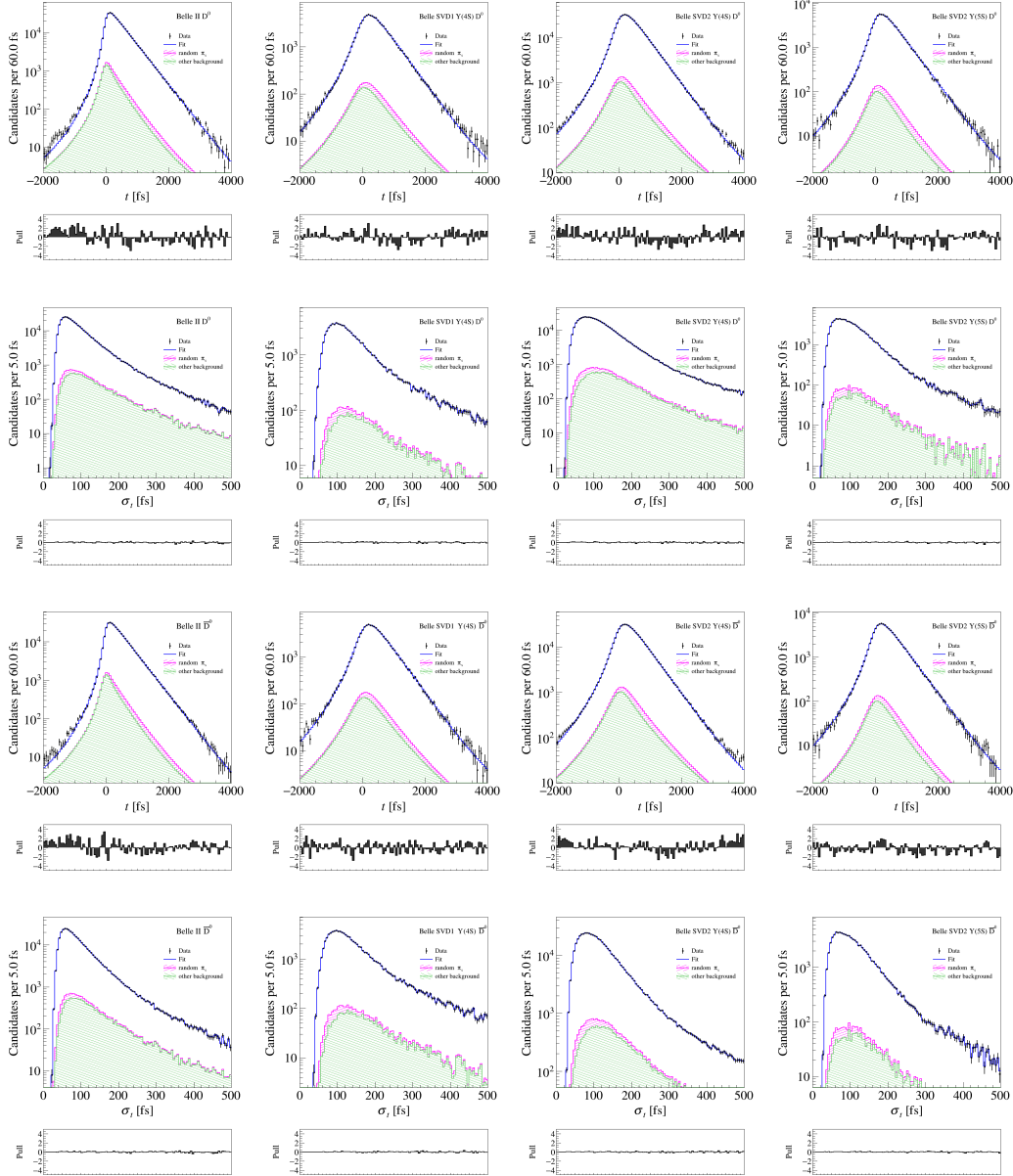


图 6.3 Belle 和 Belle II 实验数据联合含时拟合结果。

点表示全达利兹图的候选者，蓝直方图表示所有达利兹图区间的信号和本底的拟合函数之和。随机 π 介子本底和其他本底用不同的阴影线直方图表示。

混合参数的测量结果为：

$$x = (3.6 \pm 1.7 \pm 0.4) \times 10^{-3} ,$$

$$y = (3.5 \pm 1.4 \pm 0.3) \times 10^{-3} .$$

第一项误差为统计误差，第二项误差为系统误差。 x 和 y 的相关系数为 0.046。

单独拟合不同数据集的结果，以及这些结果的统计平均值如表 6.1 和图 6.4 所示。各拟合结果一致。Belle 和 Belle II 数据集的混合参数单位统计量拟合误差稍有差别。讨论详见附录 B.7。

表 6.1 单独拟合不同数据集的结果及其统计平均值。

	$x [\times 10^{-3}]$	$y [\times 10^{-3}]$
Belle SVD1 $Y(4S)$	-0.3 ± 6.4	0.0 ± 5.0
Belle SVD2 $Y(4S)$	2.1 ± 2.6	3.4 ± 2.1
Belle SVD2 $Y(5S)$	-1.7 ± 5.8	8.5 ± 4.8
Belle II	6.7 ± 2.8	3.0 ± 2.1
统计平均值	3.1 ± 1.7	3.4 ± 1.4

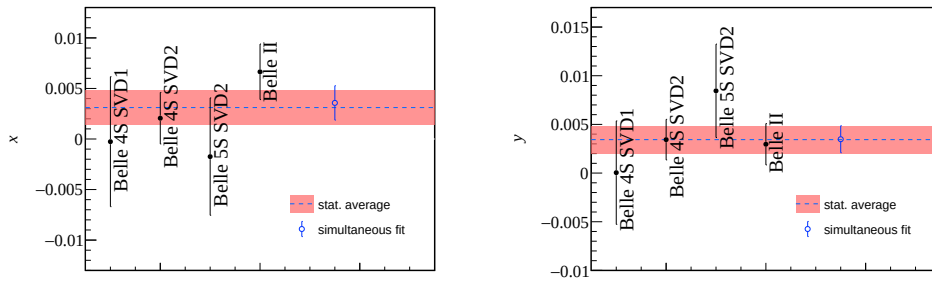


图 6.4 Belle 和 Belle II 数据混合参数拟合结果。

空心点为 Belle 和 Belle II 数据的联合拟合结果，实心点为单独拟合各数据集的结果，点的误差为拟合误差。虚线为单独拟合结果的统计平均值，红色区域是其一倍误差范围。各拟合结果一致。

6.3 系统误差

混合参数测量的系统误差考虑了以下来源：

1. 达利兹图重建效率。假设效率不随达利兹图变化带来的系统误差，对 x 参数为 0.1×10^{-3} ，对 y 参数为 0.03×10^{-3} 。在 Toy MC 中加入 Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间信号 MC 的重建效率，得到新的 Toy MC 样本。拟合此 Toy MC 样本，得到的 x 分布和 y 分布的中心值分别与输入值偏离 -0.1×10^{-3} 和 $+0.03 \times 10^{-3}$ ，如图 6.5 所示。取偏差值的绝对值作为系统误差。

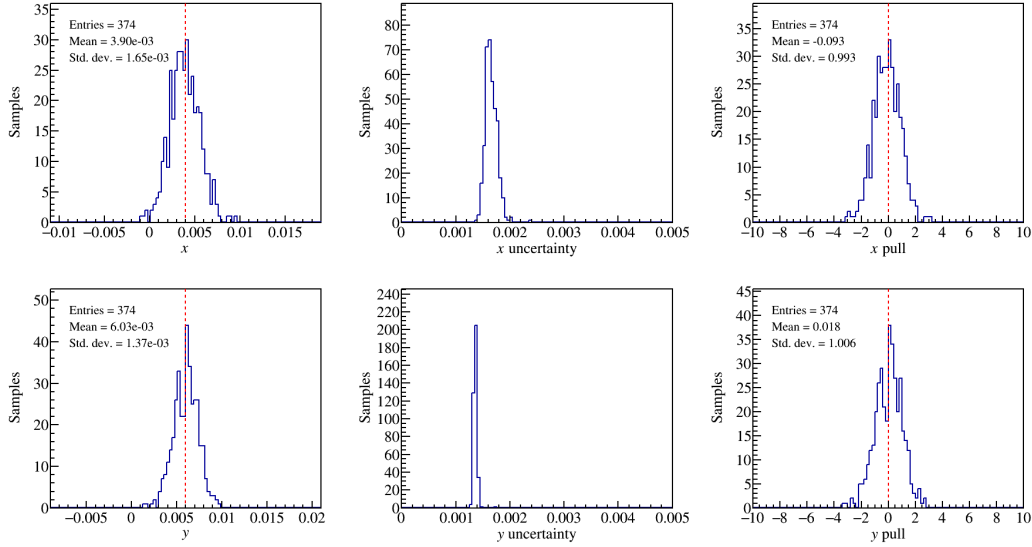


图 6.5 达利兹图效率系统误差研究中, Toy MC 样本的混合参数拟合值分布。

左图对比了约 400 个 Toy MC 样本的混合参数拟合值和输入值。输入值 ($x = 0.004$, $y = 0.006$) 用虚线标出。中图为拟合误差的分布, 右图为 pull 分布。

2. 达利兹图分辨率。忽略达利兹图的分辨率带来的系统误差, 对 x 参数为 0.04×10^{-3} , 对 y 参数为 0.12×10^{-3} 。在 Toy MC 中加入 Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间信号 MC 的达利兹图分辨率, 得到新的 Toy MC 样本。拟合此 Toy MC 样本, 得到的 x 分布和 y 分布的中心值分别与输入值偏离 $+0.04 \times 10^{-3}$ 和 $+0.12 \times 10^{-3}$, 如图 6.6 所示。取偏差值的绝对值作为系统误差。

3. D^0 衰变时间分辨率。 D^0 衰变时间分辨率的描述方法带来的系统误差, 对 x 参数为 0.06×10^{-3} , 对 y 参数为 0.04×10^{-3} 。Toy MC 中, 时间分辨率由解析函数描述。现用抽样法生成基于相空间信号 MC 的分辨率。对 Belle II, Belle SVD1 $Y(4S)$, Belle SVD2 $Y(4S)$ 和 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间信号 MC 的 $\delta t = t - t_{\text{true}}$ 抽样, 并与 Toy MC 的 t_{true} 组合, 得到新的 t 。拟合此 Toy MC 样本, 得到的 x 分布和 y 分布的中心值分别与输入值偏离 $+0.06 \times 10^{-3}$ 和 -0.04×10^{-3} , 如图 6.7 所示。取偏差值的绝对值作为系统误差。其中一个 Toy MC 样本的拟合结果如图 6.8 所示。

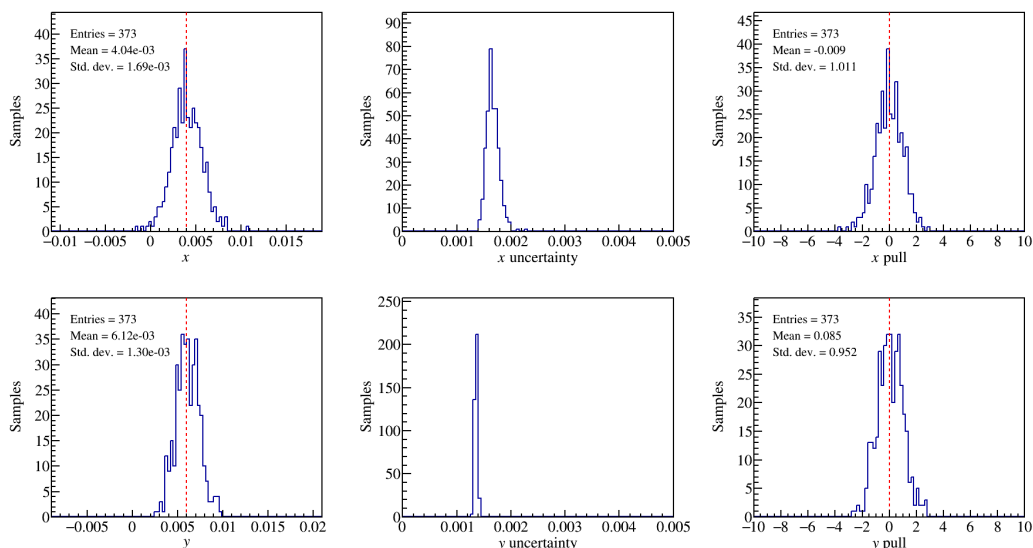


图 6.6 达利兹图分辨率系统误差研究中, Toy MC 样本的混合参数拟合值分布。

左图对比了约 400 个 Toy MC 样本的混合参数拟合值和输入值。输入值 ($x = 0.004$, $y = 0.006$) 用虚线标出。中图为拟合误差的分布, 右图为 pull 分布。

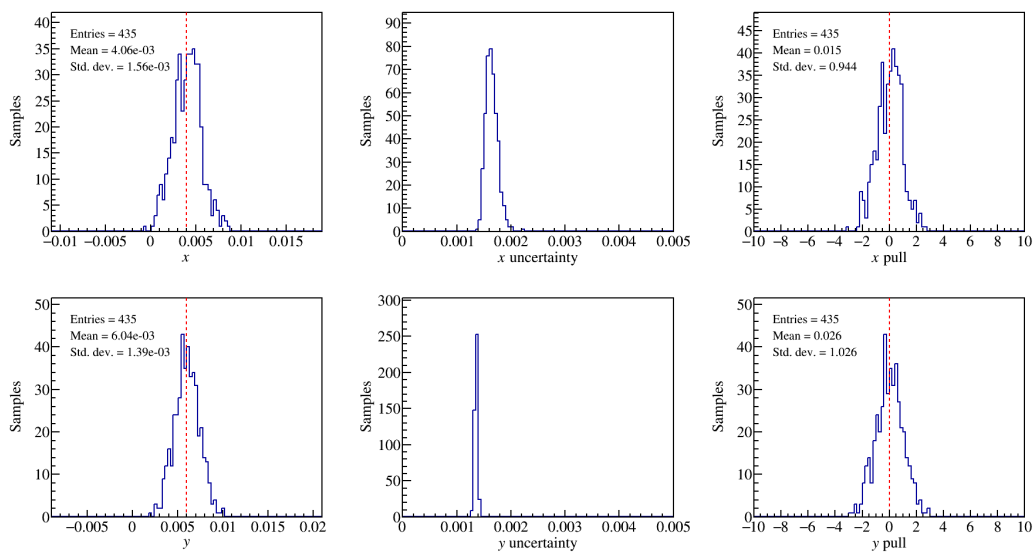


图 6.7 D^0 衰变时间分辨率系统误差研究中, Toy MC 样本的混合参数拟合值分布。

左图对比了约 400 个 Toy MC 样本的混合参数拟合值和输入值。输入值 ($x = 0.004$, $y = 0.006$) 用虚线标出。中图为拟合误差的分布, 右图为 pull 分布。

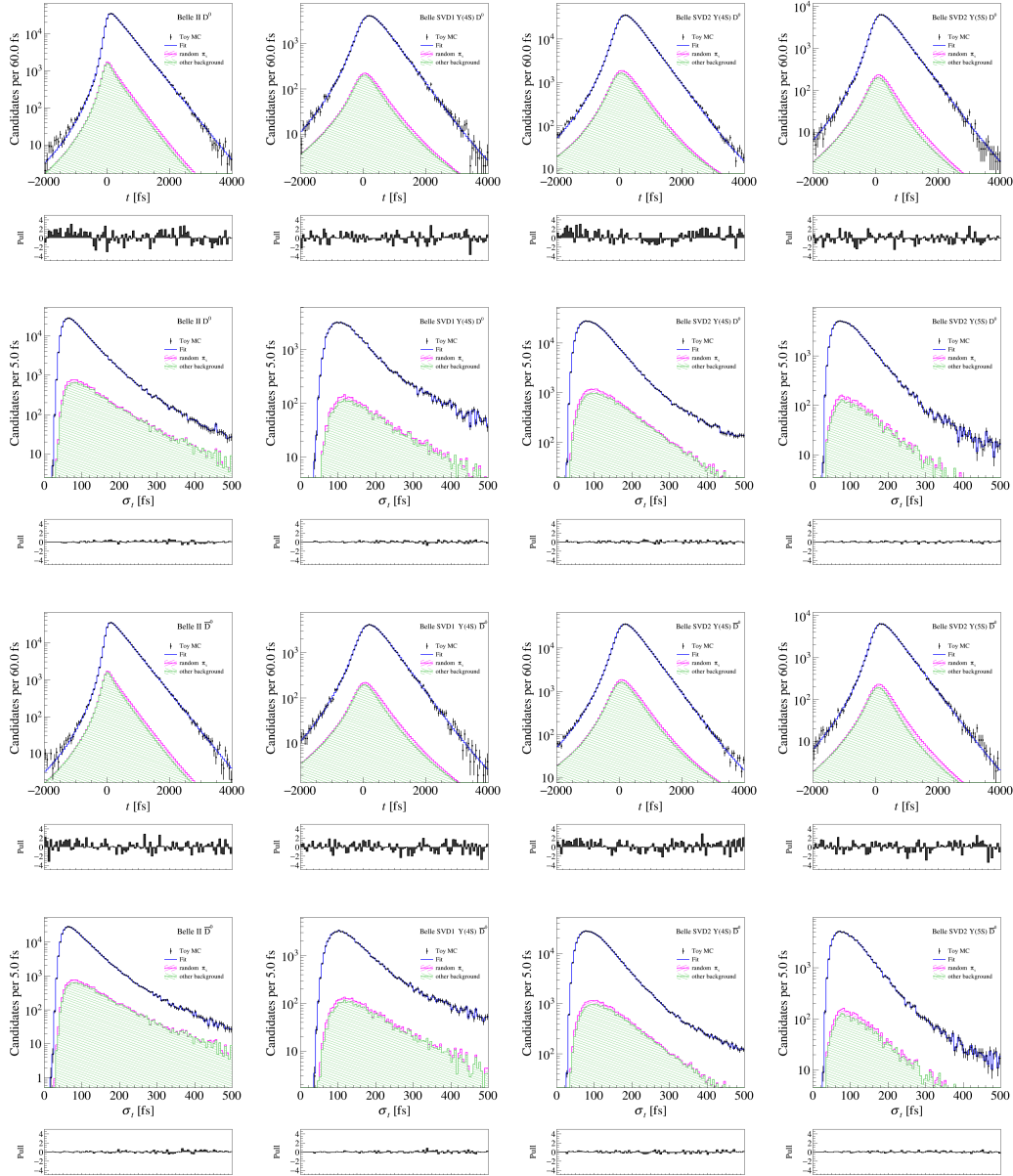


图 6.8 D^0 衰变时间分辨率系统误差研究中，一个 Toy MC 样本的含时拟合结果。

点表示全达利兹图的候选者，蓝直方图表示所有达利兹图区间的信号和本底的拟合函数之和。随机 π 介子本底和其他本底用不同的阴影线直方图表示。

4. 本底。其他本底的描述方法带来的系统误差，对 x 参数为 0.38×10^{-3} ，对 y 参数为 0.30×10^{-3} 。在 Toy MC 中，其他本底由解析函数描述。现用抽样法生成基于 generic MC 的本底。对 Belle II, Belle SVD1 Y(4S), Belle SVD2 Y(4S) 和 Belle SVD2 Y(5S) generic MC 中的其他本底进行抽样，替换 Toy MC 中的其他本底。拟合此 Toy MC 样本。拟合时，根据章节 5 的 generic MC 拟合结果考虑 f_{sig} 和 f_{rnd} 与真实值的偏差。拟合得到的 x 分布和 y 分布的中心值分别与输入值偏离 -0.38×10^{-3} 和 $+0.30 \times 10^{-3}$ ，如图 6.9 所示。取偏差值的绝对值作为系统误差。

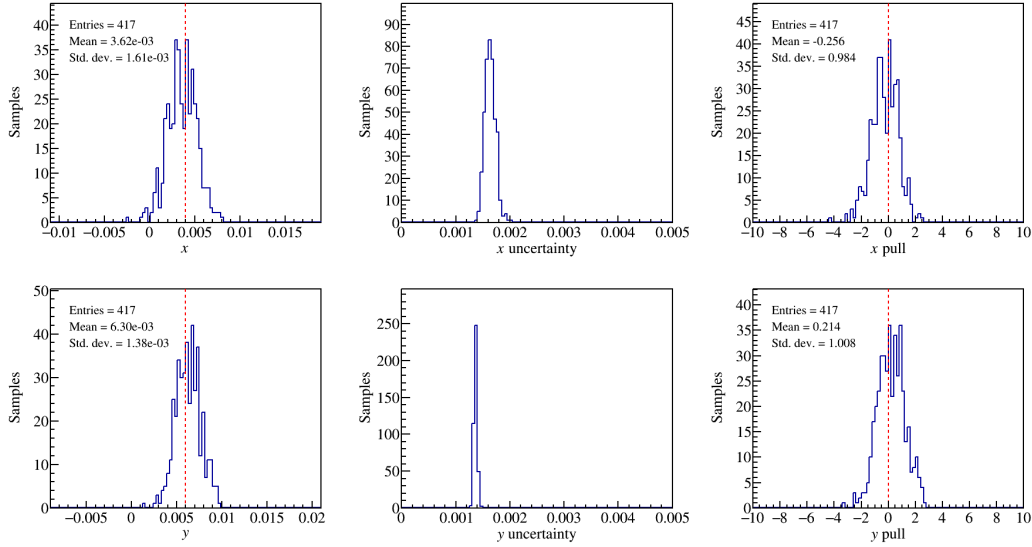


图 6.9 本底系统误差研究中, Toy MC 样本的混合参数拟合值分布。

左图对比了约 400 个 Toy MC 样本的混合参数拟合值和输入值。输入值 ($x = 0.004$, $y = 0.006$) 用虚线标出。中图为拟合误差的分布, 右图为 pull 分布。

5. D^0 寿命。 D^0 寿命的误差带来的系统误差, 对 x 参数为 0.01×10^{-3} , 对 y 参数为 0.01×10^{-3} 。拟合的 pdf 中 D^0 寿命总是与 x 或 y 相乘。拟合时 D^0 寿命固定到其 PDG 值 $410.3 \pm 1.0 \text{ ps}^{[10]}$ 。 D^0 寿命的相对误差作为系统误差。

6. 味道标记错误率。味道标记错误率带来的系统误差对 x 参数为 0.12×10^{-3} , 对 y 参数为 0.04×10^{-3} 。在含时拟合中, 味道标记错误率固定到测量值 $f_{\text{mistag}} = (42.11 \pm 0.19)\%$ 。分别令 $f_{\text{mistag}} = (42.11 + 0.19)\%$ 和 $f_{\text{mistag}} = (42.11 - 0.19)\%$, 重新拟合数据。取重新拟合值与原拟合值的最大差别为系统误差。

系统误差的总结如表 6.2 所示。假设各项系统误差都是无关的, 通过平方和组合得 x 参数的总系统误差为 0.4×10^{-3} , y 参数的总系统误差为 0.3×10^{-3} 。最大的系统误差来源于本底。

	$x [10^{-3}]$	$y [10^{-3}]$
达利兹图效率	0.10	0.03
达利兹图分辨率	0.04	0.12
D^0 衰变时间分辨率	0.06	0.04
本底	0.38	0.30
D^0 寿命	0.01	0.01
味道标记错误率	0.12	0.04
总和	0.4	0.3

表 6.2 混合参数测量的系统误差。

6.4 总结和讨论

本工作基于 Belle 和 Belle II 数据中的 $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow c\bar{c} \rightarrow D^{*+} + X$, $D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+$, $D^0 \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ 样本用模型无关方法测量假设 CP 守恒时的 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合参数。测量结果与 HFLAV 的拟合结果 $x = (4.34_{-1.39}^{+1.26}) \times 10^{-3}$ 和 $y = (6.46 \pm 0.24) \times 10^{-3}$ [18] 一致。表 6.3 为本工作结果与 BaBar [39]、Belle [40] 和 LHCb [43] 最好结果的对比。本工作的统计误差与系统误差小于 Belle 和 BaBar。本工作得到了目前正负电子对撞机上最精确的 x 参数测量结果。

基于实验数据估计 Belle II 实验未来的 x 参数测量误差, 如图 6.10 所示。图中按照统计量平方根缩放 Belle II 数据的拟合误差。根据 Toy MC 研究, Belle II 的 x 参数测量的本底系统误差约为 0.20×10^{-3} 。假设其他系统误差不变, Belle II 的 x 参数测量的总系统误差约为 0.27×10^{-3} 。由此得到的总误差如图中红虚线所示。Belle II 的 $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow c\bar{c} \rightarrow D^{*+} + X$, $D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+$, $D^0 \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ 样本统计量达到 2.5×10^7 时, x 参数的测量精度与 LHCb 2021 年测量结果 [43] 的精度相仿。对应的 Belle II 积分亮度为 15.3 ab^{-1} 。如果能利用事例数巨大的 Belle II Charm Flavor Tagger [113] $e^+e^- \rightarrow D^0 + X$, $D^0 \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ 样本, 则所需亮度可大幅减少^①。

本工作的方法可用于 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合中 CP 破坏的测量。 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合中 CP 破坏的标准模型预言为 $|q/p| - 1 \approx 2 \times 10^{-4}$ 和 $\phi \approx (6 \times 10^{-3})^\circ$ [20], 实验上还未发现 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合中的 CP 破坏。若实验发现 D^0 - $\bar{D}^0$ 混合远大于标准模型预言, 则有可能是超出标准模型的新物理的迹象。

本工作 (BELLE2-NOTE-PH-2023-066) 正在 Belle II 合作组内评审。

表 6.3 本工作的结果与 BaBar、Belle 和 LHCb 最好结果的对比。

Belle 和 BaBar 结果第一项误差为统计误差, 第二项为系统误差, 第三项为模型误差。LHCb(2021) 用模型无关方法测量 x_{CP} , y_{CP} , Δx 和 Δy 后, 用此作为输入值通过拟合得到 x , y , $|q/p|$ 和 ϕ , 最终只给出总误差。Belle + Belle II (本工作) 结果第一项误差为统计误差, 第二项为系统误差。

实验组 (年份)	积分亮度	信号事例数	$x [10^{-3}]$	$y [10^{-3}]$	$ q/p $	$\phi [^\circ]$
BaBar(2010) [39]	468.5 fb^{-1}	0.84×10^6	$1.6 \pm 2.3 \pm 1.2 \pm 0.8$	$5.7 \pm 2.0 \pm 1.3 \pm 0.7$	-	-
Belle(2014) [40]	921 fb^{-1}	1.23×10^6	$5.6 \pm 1.9_{-0.9-0.9}^{+0.3+0.6}$	$3.0 \pm 1.5_{-0.5-0.6}^{+0.4+0.3}$	$0.90_{-0.15-0.04-0.05}^{+0.16+0.05+0.06}$	$-6 \pm 11 \pm 3_{-4}^{+3}$
LHCb(2021) [43]	5.4 fb^{-1}	30.6×10^6	$3.98_{-0.54}^{+0.56}$	$4.6_{-1.4}^{+1.5}$	0.996 ± 0.052	$3.2_{2.9}^{+2.7}$
Belle + Belle II (本工作)	1350 fb^{-1}	2.05×10^6	$3.6 \pm 1.7 \pm 0.4$	$3.5 \pm 1.4 \pm 0.3$	-	-

^①Charm Flavor Tagger $e^+e^- \rightarrow D^0 + X$ 样本的分析方法稍有不同。本工作中信号候选者的 D^0 味道由 D^{*+} 的 π^+ 标记。Charm Flavor Tagger 样本中的 D^0 味道根据分析 X 部分的多条径迹得到, 其正确率约为 80%。

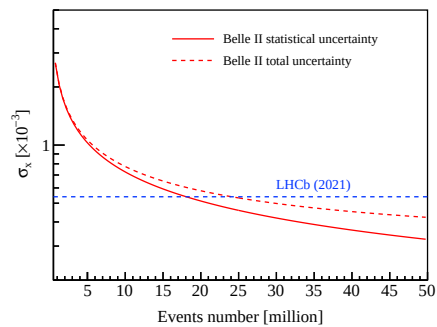


图 6.10 对 Belle II 实验 x 参数测量误差的估计。

图中展示了 x 参数测量误差随 Belle II $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow c\bar{c} \rightarrow D^{*+} + X$, $D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+$, $D^0 \rightarrow K_s^0\pi^+\pi^-$ 样本信号事例数的变化趋势。红实线为统计误差，红虚线为总误差。图中用蓝线标出 LHCb 合作组 2021 年测量结果的总误差。

第 7 章 Belle 实验上 Σ^+ 和 Σ^0 有效电磁形状因子的测量

7.1 研究动机

7.1.1 重子电磁形状因子

重子是构成物质世界的基石。上世纪 50 年代 SLAC 的系列实验发现质子和中子不是点粒子^[114]。测量电磁形状因子是研究重子内部结构的重要手段^[115-117]。电磁形状因子描述电荷和磁矩在重子内部的分布，以下对其理论背景做简要介绍。

自旋 1/2 的点粒子 f 通过光子与电子散射 ($ef \rightarrow ef$) 的树图阶费曼图如图 7.1 所示，振幅为

$$i\mathcal{M} = ie^2 \left(\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \right) \frac{1}{q^2} \left(\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \right) . \quad (7.1)$$

其中, p, p' 为 f 在散射前后的四动量, k, k' 为电子在散射前后的四动量, q 为转移的四动量, $q = p' - p = k - k'$ 。

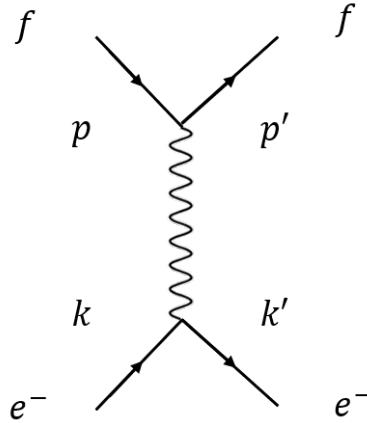


图 7.1 f 通过光子与电子散射的树图阶费曼图。

当 f 为自旋 1/2 的非点粒子时，需对式 7.1 中 f 与光子相互作用顶点进行修正^①

$$i\mathcal{M} = ie^2 \left(\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \right) \frac{1}{q^2} \left(\bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p) \right) . \quad (7.2)$$

其中 Γ_μ 是一个洛伦兹矢量，其可能的形式为

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + (p'^\mu - p^\mu) \cdot C , \quad (7.3)$$

式中 A, B 和 C 是洛伦兹标量。由 Ward 恒等式可知, C 为零^[6]。 q^2 是唯一和初末态动量有关的洛伦兹标量。 A 和 B 一定是 q^2 的函数。设 f 的质量为 m , 根据

^①考虑 QED 高阶项时, 也应对电子和光子的相互作用顶点进行修正。这种修正远远小于本文所讨论的由重子的非点结构带来的修正, 故忽略。

Gordon 恒等式,

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu v(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(p) \quad . \quad (7.4)$$

用 γ^μ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 表示式 7.3 中的第二项, 得

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot (A + 2mB) - \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \cdot 2mB \quad .$$

将上式改写为

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) \quad , \quad (7.5)$$

其中 F_1 为狄拉克形状因子, 描述自旋 1/2 的点粒子与光子的相互作用。 F_2 为泡利形状因子, 描述粒子的非点结构与光子的相互作用^[118-121]。式 7.5 中的两项都与粒子的自旋相关^①。把式 7.5 改写为

$$\Gamma^\mu(p', p) = -\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} F_2(q^2) + \gamma^\mu (F_1(q^2) + F_2(q^2)) \quad , \quad (7.6)$$

则第一项和自旋无关, 而第二项和自旋相关。选取一个坐标系^②, 令 $\vec{p}' = -\vec{p}$ 。则在这个坐标系中, 对 f 和光子的耦合项 $e\bar{u}(k)\Gamma^\mu v(k')A_\mu$ 有^[115,122]

$$e\bar{u}(p')\Gamma^0 u(p)A_0 = e \cdot \phi \cdot 2m\chi'^+ \chi (F_1 - \frac{q^2}{4m} F_2) \quad , \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} e\bar{u}(p')\Gamma u(p) \cdot \mathbf{A} &= ie \cdot \chi'^+ (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q} \cdot \mathbf{A}) \chi (F_1 + F_2) \\ &= e \cdot \chi'^+ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) \chi (F_1 + F_2) \quad . \end{aligned} \quad (7.8)$$

χ' 和 χ 是费米子波函数 $u(p')$ 和 $u(p)$ 的自旋部分。式 7.7 与电荷在电势为 $\phi = A_0$ 的电场中的能量有相似的形式。定义电形状因子 (electric form factor)^[115-117]

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) - \tau F_2(q^2) \quad , \quad (7.9)$$

$\tau = \frac{q^2}{4m^2}$ 。其物理意义为电荷在 f 中的分布^③。式 7.8 与磁矩非零的费米子在磁场 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 中的能量有相似的形式。定义磁形状因子 (magnetic form factor)^[115-117]

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2) \quad , \quad (7.10)$$

其物理意义为磁矩在 f 中的分布。

ef 散射在实验室系下的微分截面可用 G_E , G_M 描述。选取一个坐标系, 令 $k = (E, 0, 0, E)$, $k' = (E', E' \sin \theta, 0, E' \cos \theta)$, $p = (m, 0, 0, 0)$, 并对初态所有可

^① 第一项含有狄拉克矩阵 γ^μ , 与波函数中的自旋部分耦合。第二项中的 $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ 。

^② 这种参考系称为 Breit 参考系。

^③ 这里的 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$ 为 q^2 的函数。由傅里叶变换, 可得电荷或者磁矩在空间中的分布函数。

能的自旋极化方向取平均，对末态所有可能的极化方向求和，可得 Rosenbluth 方程^[6,123]

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2 \left[\left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{\tau + 1} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}{2E^2 \left[1 + \frac{2E}{m} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (7.11)$$

其中， θ 为电子的散射角， α 是精细结构常数。

根据交换对称性 (crossing symmetry)，将 7.11 式对应的四动量 p 替换成 $-p$ ， k' 替换成 $-k'$ ，可得 $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ 的微分截面。变换到 $f\bar{f}$ 质心系后，得质心系下的 $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ 的微分截面

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2\beta C}{2s} \left(|G_M(s)|^2 (1 + \cos^2\theta) + \frac{4m^2}{s} |G_E(s)|^2 \sin^2\theta \right), \quad (7.12)$$

其中， θ 为末态 f 的动量与初态 e^- 的动量的夹角， $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/s}$ 为 f 的速度， $s = q^2$ 为质心系能量的平方。用式 7.12 描述重子对产生截面时，还需考虑末态重子的库伦相互作用，由库伦修正因子 C 描述^[124-125]。对于带电重子， $C = y/(1 - e^{-y})$ ， $y = \pi\alpha(1 + \beta^2)/\beta$ 。对于中性重子 $C = 1$ 。

$e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ 过程中的电磁形状因子定义如下^[115]

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \tau F_2(q^2), \quad (7.13)$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2). \quad (7.14)$$

在 ef 散射过程中， $q^2 < 0$ ，此时 $G_E(q^2)$ ， $G_M(q^2)$ 称为类空区域 (space-like region) 的电磁形状因子。对于正负电子湮灭过程 $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ ， $q^2 > 0$ ， $G_E(q^2)$ ， $G_M(q^2)$ 称为类时区域 (time-like region) 的电磁形状因子。由振幅的么正性和 $G_E(q^2)$ ， $G_M(q^2)$ 的解析性，当 $q^2 < 0$ 时， $G_E(q^2)$ ， $G_M(q^2)$ 为实数；当 $q^2 > 0$ 时， $G_E(q^2)$ ， $G_M(q^2)$ 为复数^[115,126]。类时和类空形状因子之间的关系，可以通过色散关系描述^[115,126]。

定义有效形状因子^① $|G_{\text{eff}}(s)| = |G_E(s)| = |G_M(s)|$ 。

对式 7.12 积分，得

$$\sigma(s) = \frac{4\pi\alpha^2\beta C}{3s} |G_{\text{eff}}(s)|^2 \left(1 + \frac{2m^2}{s} \right). \quad (7.15)$$

根据式 7.15，有效形状因子可直接从截面 $\sigma(s)$ 中提取

$$|G_{\text{eff}}(s)| = \sqrt{\frac{3s \cdot \sigma(s)}{4\pi\alpha^2\beta C} \cdot \frac{1}{1 + 2m^2/s}}. \quad (7.16)$$

G_E 、 G_M 和 G_{eff} 的具体形式可由 VMD 模型、pQCD 因子化、手征微扰论、孤子模型、相对论组分夸克模型、共形场论和基于核子结构的唯象模型等描述^[115]。

^①当统计量不足，或者无法测量微分截面的角度信息时，可以测量有效形状因子。这种方法在早期研究质子结构的散射实验中就被使用^[121]，用于描述质子和点粒子之间的区别。近年来含时形状因子的实验研究中常常测量有效形状因子^[127-128]。

7.1.2 奇异重子电磁形状因子的研究现状

奇异重子的理论和实验研究对理解强相互作用、奇异夸克和中子星^[129-130]都有重要的意义。我们可以通过电磁形状因子研究奇异重子的结构和动力学。奇异重子都不是稳定粒子，很难在散射实验中研究其类空电磁形状因子。到目前为止，此类实验工作仅有一个，SELEX 实验组的电子- Σ^- 散射实验^[131]。

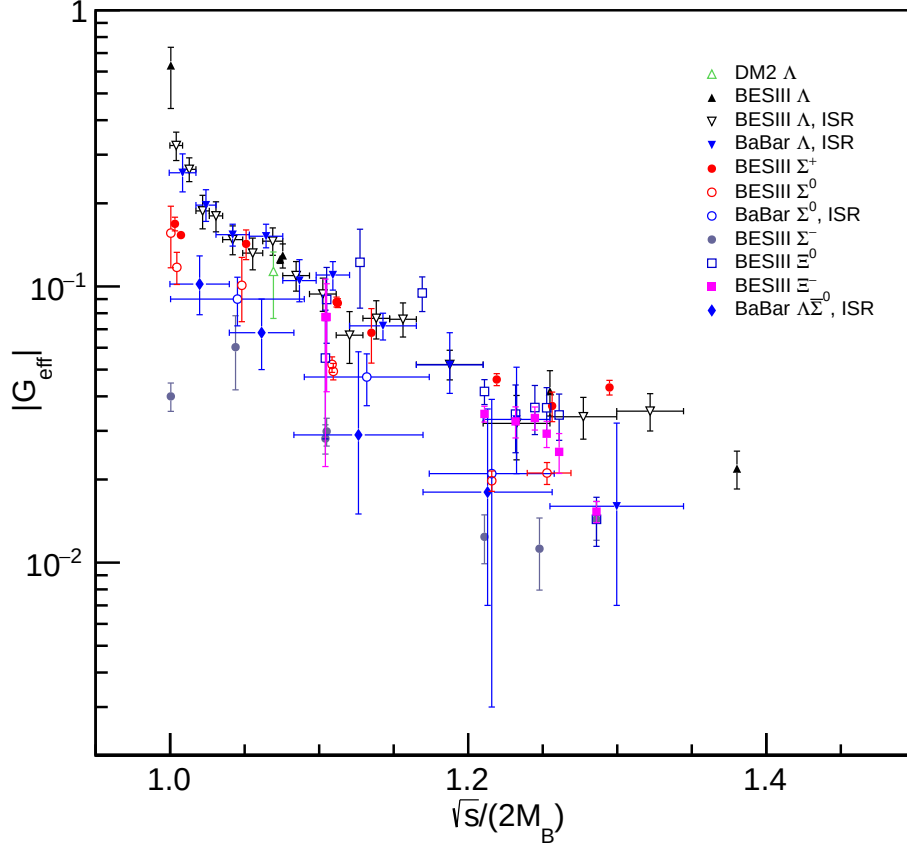


图 7.2 DM2、BESIII、BaBar 实验的奇异重子类时有效形状因子测量结果。

横坐标为重子对不变质量和其产生阈值之比。图中标出了用初态辐射方法 (ISR) 测量的结果，其余为用扫描法测量的结果。DM2 仅给出了 $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ 的截面，图中 $|G_{\text{eff}}|$ 根据截面值计算得到。BESIII 用 ISR 方法测量 $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ 过程时仅给出了截面值，图中的 $|G_{\text{eff}}|$ 根据截面值计算得到。

通过重子对产生实验研究类时形状因子，是研究奇异重子的重要途径。1990 年，DM2 实验用扫描法首次测量质心能量 $\sqrt{s} = 2.386 \text{ GeV}$ 处的 $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ 过程截面^[132]。2007 年，BaBar 实验用初态辐射方法测量了从产生阈值到 $\sqrt{s} = 3.0 \text{ GeV}$ 的 Λ 、 Σ^0 和 $\Sigma^0\bar{\Lambda}$ 的类时形状因子^[128]。2020 年前后，BESIII 实验用扫描法测量了 Λ ^[133-134]、 $\Sigma^\pm$ ^[135]、 Σ^0 ^[136]、 Ξ^- ^[137]、 Ξ^0 ^[138] 在 $\sqrt{s} < 3.5 \text{ GeV}$ 的多个能量点处的类时形状因子。最近，BESIII 实验开始用初态辐射方法测量阈值附近的奇异重子电磁形状因子^[139]。图 7.2 总结奇异重子类时形状因子测量结果。

BESIII 实验发现， Λ 类时形状因子在阈值附近的变化趋势无法用 pQCD 因子

化描述^[115,133], 如图 7.3 所示。这种阈值效应也无法用基础的 VMD 模型^[140-141] 和末态重子相互作用^[142-143] 描述。文献^[141,144] 提到, 这种阈值效应可用新的共振态解释, 如 $X(2231)$ 和 ϕ 的激发态。此外, Ξ^- ^[137] 和 Ξ^0 ^[138] 的类时形状因子的实验测量值和 pQCD 因子化的预言也存在偏差。文献^[145] 指出如果用 VMD 模型描述 Ξ^- 和 Ξ^0 的类时形状因子, 则需要加入质量分别为 $2.742 \text{ GeV}/c^2$ 和 $2.993 \text{ GeV}/c^2$ 的新共振态。 $\Sigma^\pm$ ^[135], Σ^0 ^[136] 的类时形状因子的实验测量值, 也出现了和 pQCD 预言偏离的趋势^[146-147]。目前受到统计量的限制, 难以对 Σ 的结果进行更严格的讨论。

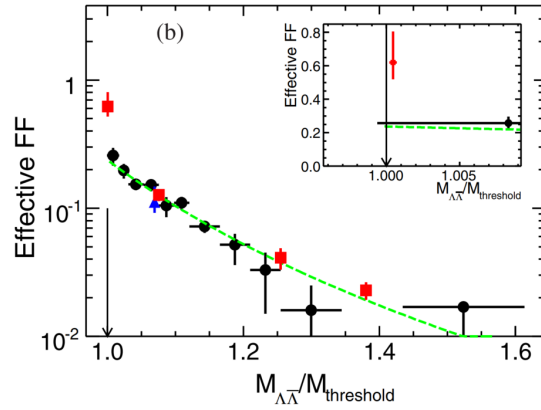


图 7.3 Λ 类时形状因子和 pQCD 预言的对比^[133]。

横坐标为 $\Lambda\bar{\Lambda}$ 不变质量和阈值之比。方形红点, 黑色圆点和蓝色三角形, 分别为 BESIII, BaBar 和 DM2 测量结果。绿色虚线为 pQCD 预言。图中, 最靠近阈值的 BESIII 测量值明显偏离 pQCD 预言。

7.1.3 研究目的

本文根据 Belle 实验采集的 980 fb^{-1} 数据, 使用初态辐射方法, 测量 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 反应截面, 提取 Σ^+ 和 Σ^0 有效电磁形状因子。能量区间从 $\Sigma\bar{\Sigma}$ 产生阈值到 3.0 GeV 。作为对照检查, 本文也测量 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 和 $J/\psi \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 分支比^①。

7.2 初态辐射方法

正负电子在碰撞时有一定几率发生初态辐射 (initial state radiation, ISR), 即湮灭前电子或正电子辐射出一个或多个光子, $e^+e^- \rightarrow X + (\gamma_{\text{ISR}})$ 。此处, X 表示 e^+e^- 湮灭产生的末态。ISR 过程的最低阶费曼图如图 7.4 所示。 $e^+e^- \rightarrow X + (\gamma_{\text{ISR}})$ 截面和 $e^+e^- \rightarrow X$ 截面的关系如下

^①由于 Σ^- 几乎全部衰变成一个中子和一个 π^- , 中子在 Belle 中不易被重建, 本工作不对 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^-\bar{\Sigma}^+$ 进行分析。

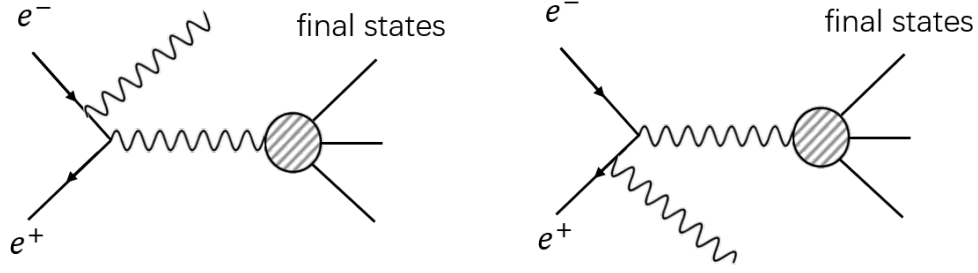


图 7.4 初态辐射过程的树图阶费曼图。

$$\frac{d\sigma_{X+\gamma_{\text{ISR}}}(s, x)}{dx} = W(s, x) \cdot \sigma_X(s(1-x)) \quad , \quad (7.17)$$

其中 $x = 2E^*(\gamma_{\text{ISR}})/\sqrt{s}$, 是质心系下初态辐射光子能量与质心系能量一半之比, $E^*(\gamma_{\text{ISR}})$ 表示光子在正负电子质心系下的能量。 $s(1-x)$ 表示在 ISR 事件中正负电子湮灭过程 $e^+e^- \rightarrow X$ 的质心系能量。 $W(s, x)$ 是 ISR 辐射概率 (ISR emission probability)^①。 本工作采用包含 α^2 阶修正的 $W(s, x)$ ^[148-152]。

用 ISR 事例 $e^+e^- \rightarrow X + (\gamma_{\text{ISR}})$ 研究 $e^+e^- \rightarrow X$ 过程, 称为初态辐射方法^②。 初态辐射方法的详细介绍见附录 D。

7.3 数据样本

本工作使用 Belle 实验在 $Y(nS)$ ($n = 1, 2, \dots, 5$) 共振峰及附近能区采集的实验数据, 积分亮度为 980 fb^{-1} 。 详见表 7.1。

表 7.1 $Y(nS)$ ($n = 1, 2, \dots, 5$) 共振峰及附近能区数据的积分亮度 ($\mathcal{L}$)。

	$Y(1S)$	$Y(2S)$	$Y(3S)$	$Y(4S)$	$Y(5S)$
$\mathcal{L} (\text{fb}^{-1})$	7.6	26.9	3.2	792.8	150.4

用蒙特卡洛 (Monte Carlo, MC) 模拟样本研究重建效率和分辨率等。 表 7.2 列出了本文用到的所有 MC 样本。 对于信号过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma \bar{\Sigma}$, 首先用 PHOKHARA^[153] 抽样产生一个或者两个 ISR 光子^③。 然后用 EvtGen^[154] 的 HELAMP 模式模拟正负电子湮灭成 $\Sigma \bar{\Sigma}$ 的过程。 用 $G_E = G_M$ 的 MC 样本确定重建效率的中心值。 用 $G_E \neq G_M$ 的 MC 样本估计系统误差。

为研究 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 道的本底过程, 产生 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Lambda \bar{\Lambda}$ 和 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Lambda}$ MC 样本。

为研究 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 道的本底过程, 产生 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} p \bar{p} \pi^0 \pi^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow$

^①有的文献中, $W(s, x)$ 被称为辐射子 (radiator)。

^②直接用 e^+e^- 湮灭事例研究 $e^+e^- \rightarrow X$ 过程, 称为扫描法。 扫描法可以精确测量单个能量点处的截面值, 而初态辐射方法可测量连续能量区间的截面。

^③抽样的过程考虑了次领头阶 (next-to-leading-order, NLO) 的 QED 修正。

$\gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{p} \pi^0$ MC 样本。其中 $p \bar{p} \pi^0 \pi^0$ 和 $\Sigma^+ \bar{p} \pi^0$ 分别由纯四体和三体相空间抽样产生。

为研究 ISR 本底过程 $e^+ e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma \bar{\Sigma} \pi^0$ 、 $e^+ e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma \bar{\Sigma} \eta$ ，和非 ISR 本底过程 $e^+ e^- \rightarrow \Sigma \bar{\Sigma} \pi^0$ 、 $e^+ e^- \rightarrow \Sigma \bar{\Sigma} \eta$ ，产生对应的 MC 样本。其中 $\Sigma \bar{\Sigma} + \eta/\pi^0$ 由纯三体相空间抽样产生。

对于其他来自 $e^+ e^- \rightarrow q \bar{q}$ ($q = u, d, s, c$) 过程和 B 介子衰变的本底模拟，采用 Belle 合作组的单举 MC 样本 (generic MC)^[155]。

探测器响应的模拟由 Belle 合作组基于 GEANT3^[98] 的模拟软件包完成。模拟样本包含触发系统 (trigger) 模拟。

表 7.2 本文用到的 MC 样本。

MC 样本	产生方法
$e^+ e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma \bar{\Sigma}$	PHOKHARA + EvtGen (HELAMP)
$e^+ e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Lambda \bar{\Lambda}$	PHOKHARA + EvtGen (HELAMP)
$e^+ e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Lambda}$	PHOKHARA + EvtGen (HELAMP)
$e^+ e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} p \bar{p} \pi^0 \pi^0$	PHOKHARA + EvtGen (相空间)
$e^+ e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{p} \pi^0$	PHOKHARA + EvtGen (相空间)
$e^+ e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma \bar{\Sigma} + \pi^0/\eta$	PHOKHARA + EvtGen (相空间)
$e^+ e^- \rightarrow \Sigma \bar{\Sigma} + \pi^0/\eta$	PHOKHARA + EvtGen (相空间)
$e^+ e^- \rightarrow q \bar{q}$	Belle generic MC
B 介子衰变	Belle generic MC

本工作使用 hadron_a 和 clst4 这两个 trigger 条件。hadron_a 要求 CDC 中至少有三条径迹，TOF 中至少有一处击中，ECL 中至少有两处簇射，ECL 的总沉积能量大于 0.5 GeV，并且 trigger 系统判断当前事例不是一个束流注入本底事例^①或宇宙线事例。clst4 要求 ECL 中至少存在 4 处簇射 (cluster)，并且 trigger 系统判断当前事例不是一个束流注入本底事例或宇宙线事例。

在进行事例选择时，要求 $e^+ e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 的候选事例必须通过 hadron_a 或 clst4。来自 $\Lambda \rightarrow p \pi^-$ 衰变的正反质子和 π 会在 CDC 中产生 4 条径迹，在 TOF 产生击中，在 ECL 中产生簇射，触发 hadron_a。ISR 光子、来自 $\Sigma^0 \rightarrow \gamma \Lambda$ 的光子和来自 $\Lambda \rightarrow p \pi^+$ 的质子，有概率在 ECL 上产生 4 处以上的簇射，触发 clst4。要求 $e^+ e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的候选事例必须通过 clst4。ISR 光子和来自 $\Sigma^+ \rightarrow p \pi^0, \pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$ 过程的光子，会在 ECL 上产生 5 处簇射，触发 clst4。

^①束流注入本底事例 (beam injection background): 束团刚注入到储存环中时，束团中的粒子不稳定，可能会跑出束流管或者和加速器的其他部分发生散射，此时探测器会有非常强的响应。

7.4 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$

7.4.1 事例重建与选择

对于 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ ，要求重建 ISR 光子，通过 $\Sigma^0 \rightarrow \gamma \Lambda$ ， $\Lambda \rightarrow p \pi^+$ 完全重建 Σ^0 和 $\bar{\Sigma}^0$ 。事例选择条件如下。

光子选择与 ISR 光子标记：如果一处 ECL 簇射没有对应的 CDC 径迹，并且在簇射中心 3×3 阵列中沉积的能量和簇射中心 5×5 阵列中沉积的能量之比大于 0.7，则该簇射被鉴别成光子。要求候选事例中至少含有一个在正负电子质心系中能量大于 3 GeV 的光子。事例中能量最高的光子被标记为 ISR 光子， γ_{ISR} 。

径迹数：事例中的径迹数严格等于 4^①，径迹的电荷之和为零。

带电粒子鉴别：质子径迹要满足 $L_p/(L_p + L_\pi) > 0.6$ 和 $L_p/(L_p + L_K) > 0.6$ 。 π 径迹要满足 $L_\pi/(L_\pi + L_K) > 0.6$ 和 $L_\pi/(L_\pi + L_p) > 0.6$ 。其中，似然值 L_i 表示当前带电径迹为粒子 $i = \pi, K, p$ 的可能性。

Λ 重建：要求质子和 π^- 来自同一个顶点。不变质量 $M(p\pi^-)$ 大于 1.110 GeV/ c^2 ，小于 1.122 GeV/ c^2 。这个区间大致对应 3 倍的 Λ 质量分辨率。

$\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 重建^②：要求 $\Sigma^0 \rightarrow \gamma \Lambda$ 的光子在实验室系的能量大于 70 MeV。由于存在本底光子，部分事例中存在多种 $\gamma \gamma \Lambda \bar{\Lambda}$ 组合，取反冲质量平方绝对值 $|M_{\text{rec}}^2(\gamma \gamma \Lambda \bar{\Lambda})|$ 最小的组合。反冲质量平方的定义如下

$$M_{\text{rec}}^2(X) = (E_{e^+e^-} - E(X))^2 - |\vec{p}_{e^+e^-} - \vec{p}(X)|^2, \quad (7.18)$$

其中 $E_{e^+e^-}$ 和 $\vec{p}_{e^+e^-}$ 是正负电子对的能量和动量， $E(X)$ 和 $\vec{p}(X)$ 是 X 的能量和动量^③。一个 $\gamma \gamma \Lambda \bar{\Lambda}$ 组合有两种方式组合成 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ ，取 $|M(\gamma_i \Lambda) - m_{\Sigma^0}| + |M(\gamma_j \bar{\Lambda}) - m_{\Sigma^0}|$ 最小的组合。 m_{Σ^0} 为 Σ^0 质量的 PDG 值^[10]， γ_i 和 γ_j 指代不同光子， $M(\gamma \Lambda)$ 和 $M(\gamma \bar{\Lambda})$ 分别是 $\gamma \Lambda$ 和 $\gamma \bar{\Lambda}$ 的不变质量。

压低本底：为进一步压低本底事例，要求 $-1 \text{ GeV}^2/c^4 < M_{\text{rec}}^2(\gamma \gamma \Lambda \bar{\Lambda}) < 2 \text{ GeV}^2/c^4$ ，如图 7.5 所示。点和红直方图分别表示数据和信号 MC 样本。其分布在零附近形成峰。阴影线直方图是几种本底 MC 样本的总贡献。阴影线直方图在零附近形成峰，这是 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Lambda \bar{\Lambda}$ 、 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Lambda}$ 和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 + \pi^0/\eta$ 过程的贡献。在 $M_{\text{rec}}^2(\gamma \gamma \Lambda \bar{\Lambda}) > 5 \text{ GeV}^2/c^4$ 处，阴影线直方图事例数增多。这种增多源自 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 + \pi^0/\eta$ 等含额外中性粒子的过程的贡献。

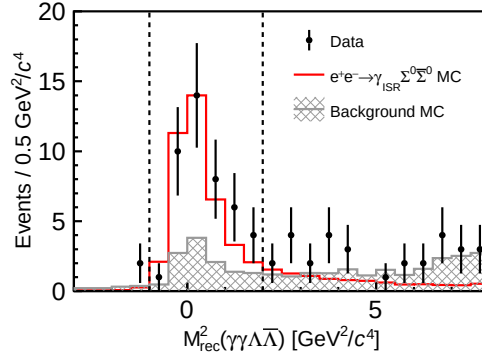
^①对径迹数的严格要求可几乎排除 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^+ \pi^-$ ， $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 K^+ K^-$ 等本底。

^②由于无法直接区分来自 Σ^0 和 $\bar{\Sigma}^0$ 的光子，直接重建单个 Σ^0 很可能会将 $\bar{\Sigma}^0$ 的光子赋给 Σ^0 。故同时重建这两者，降低光子归入错误 Σ^0 衰变链的概率。

^③在实验数据中 $M_{\text{rec}}^2(X)$ 可以为负，这是因为 $E(X)$ 和 $\vec{p}(X)$ 有不可忽略的分辨率。根据式 7.18， $M_{\text{rec}}^2(X)$ 的测量值和真实值的差为

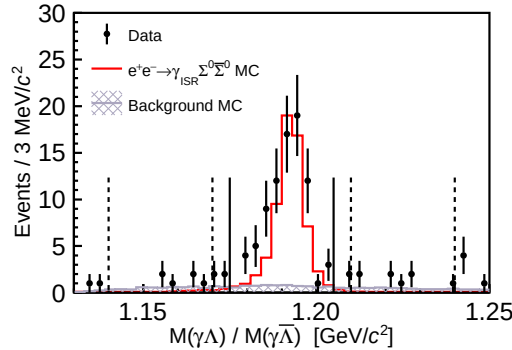
$$\Delta M_{\text{rec}}^2 \approx \frac{\partial M_{\text{rec}}^2}{\partial E(X)} \Delta E + \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial M_{\text{rec}}^2}{\partial p_i(X)} \Delta p_i,$$

其中 ΔE (Δp_i) 是 $E(X)$ ($p_i(X)$) 测量值和其真实值的差。 ΔE 和 Δp_i 可正可负，故 $M_{\text{rec}}^2(X)$ 可为负值。


 图 7.5 $M_{\text{rec}}^2(\gamma\gamma\Lambda\bar{\Lambda})$ 的分布图。

图中，点代表实验数据，红直方图代表 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 过程的 MC 样本，阴影线直方图代表几种本底 MC 样本的总贡献。图中事例已通过除对 $M_{\text{rec}}^2(\gamma\gamma\Lambda\bar{\Lambda})$ 的要求以外的所有事例选择条件。本底 MC 样本的直方图仅画出形状做定性分析，定量分析见章节 7.4.2。条件 $-1 \text{ GeV}^2/c^4 < M_{\text{rec}}^2(\gamma\gamma\Lambda\bar{\Lambda}) < 2 \text{ GeV}^2/c^4$ 由两条竖线标出。

通过上述事例选择后，候选样本中 $\gamma\Lambda$ 和 $\gamma\bar{\Lambda}$ 的质量分布如图 7.6 所示。图中可见清晰的 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 信号。图 7.6 中，点代表实验数据，红直方图代表信号 MC 中成功重建 Σ^0 或 $\bar{\Sigma}^0$ 的事例。阴影线直方图代表本底的模拟，其中主要成分为信号 MC 中 Σ^0 或 $\bar{\Sigma}^0$ 没被正确重建的事例^①。此外，还有非常少量的 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Lambda\bar{\Lambda}$ 和 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Lambda}$ MC 事例^②。


 图 7.6 通过事例选择的样本中，用于重建 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 的 $\gamma\Lambda/\gamma\bar{\Lambda}$ 的不变质量。

图中，点代表实验数据，红直方图代表 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ MC 中成功重建 Σ^0 或 $\bar{\Sigma}^0$ 的事例。阴影线直方图包含 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ MC 中 Σ^0 或 $\bar{\Sigma}^0$ 没被正确重建的事例和少量的 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Lambda\bar{\Lambda}$ 和 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Lambda}$ MC 事例。 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 信号区和边带区分别用实线和虚线标出。

如图 7.6 所示， $M(\gamma\Lambda) \in [1.175, 1.205] \text{ GeV}/c^2$ 为 Σ^0 信号区。 $M(\gamma\Lambda) \in [1.140, 1.170] \text{ GeV}/c^2$ 和 $M(\gamma\Lambda) \in [1.210, 1.240] \text{ GeV}/c^2$ 为边带区。图 7.7 为实验

^① 这种事例主要因用假光子和真 $\Lambda\bar{\Lambda}$ 组合导致 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 重建错误。

^② 根据 BaBar 实验的测量结果^[128] $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Lambda\bar{\Lambda}$ ， $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Lambda}$ 和 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 过程的截面的比例约为 5 : 1 : 1，而事例选择条件对这三个过程的效率之比为 $\frac{1}{240} : \frac{1}{20} : 1$ ，故 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Lambda\bar{\Lambda}$ 和 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Lambda}$ 对本底的贡献很小。

数据中 $M(\gamma\Lambda)$ 和 $M(\gamma\bar{\Lambda})$ 的二维分布，图中央事例数的聚集对应 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 的信号。图中的 8 个虚线正方形表示二维边带区。

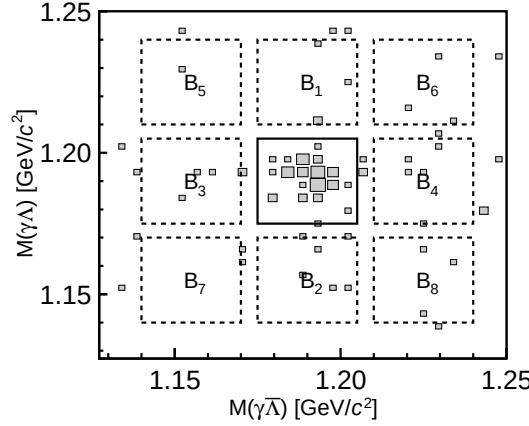


图 7.7 实验数据中 $M(\gamma\Lambda)$ 和 $M(\gamma\bar{\Lambda})$ 的二维分布。

实线正方形代表信号区，虚线正方形 B_i ($i = 1, \dots, 8$) 代表边带区。

根据式 7.19 计算 $e^+e^- \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$ 的质心能量^①

$$\sqrt{s} = M_{\Sigma\bar{\Sigma}} = M(\Sigma\bar{\Sigma}) - M(\Sigma) - M(\bar{\Sigma}) + 2m_{\Sigma} \quad , \quad (7.19)$$

其中 m_{Σ} 为 Σ 质量 PDG 值^[10]。根据 MC 研究，从 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 阈值到 $3 \text{ GeV}/c^2$ 之间， $M_{\Sigma^0\bar{\Sigma}^0}$ 的分辨率从 $3 \text{ MeV}/c^2$ 逐渐变化到 $15 \text{ MeV}/c^2$ 。 $M_{\Sigma^0\bar{\Sigma}^0}$ 的偏移 (bias)，在整个区间都小于 $2 \text{ MeV}/c^2$ ^②。本工作不考虑分辨率的修正^③。

图 7.8 是实验数据的 $M_{\Sigma^0\bar{\Sigma}^0}$ 谱。在 $3 \text{ GeV}/c^2$ 以下，观测到 24 个事例。在 $3 \text{ GeV}/c^2$ 以上，观测到 19 个事例，主要是 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 衰变。

7.4.2 本底分析

$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 过程的本底事例分为，正确重建的 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 个数为零、一和二，这三类。第一、二类对应过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Lambda\bar{\Lambda}X$ 、 $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}X + \pi^0/\eta$ 、 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0\bar{\Lambda}X$ 和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Lambda}X + \pi^0/\eta$ 。不完全正确重建的信号过程事例也属于此类。第一、二类本底无法同时在 Σ^0 和 $\bar{\Sigma}^0$ 质量谱上形成峰，其贡献 ($N_{\text{non-peak}}$) 由图 7.7 中边带 B_i ($i = 1, \dots, 8$) 的事例 N_i 估计^④

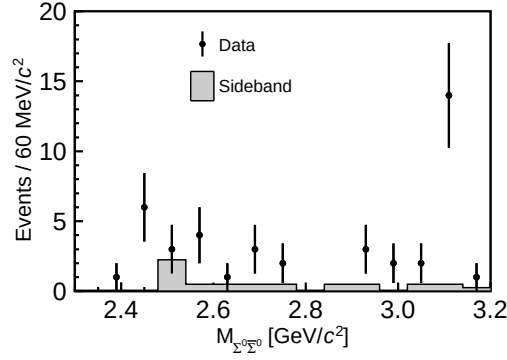
$$N_{\text{non-peak}} = \frac{1}{2} \sum_1^4 N_i - \frac{1}{4} \sum_5^8 N_i \quad . \quad (7.20)$$

① $M_{\Sigma\bar{\Sigma}}$ 相比于 $M(\Sigma\bar{\Sigma})$ 有更高的质量分辨率，因为抵消了部分 $M(\Sigma)$ 和 $M(\bar{\Sigma})$ 的分辨。

② 详见附录 C.2。

③ 表 7.4 列出了本文中用于计算截面的区间，其宽度远远大于 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 不变质量的分辨率。

④ 此处假设不形成 Σ^0 峰的本底都呈线性分布。实际情况中，本底的分布可能呈非线性分布。本工作在系统误差中估计了非线性的本底带来的影响。


 图 7.8 实验数据的 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 不变质量谱。

图中的点为 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 信号区事例的分布。直方图为用 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 边带事例估计的本底贡献。

不同 $M_{\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0}$ 区间的 $N_{\text{non-peak}}$ 如图 7.8 中的阴影直方图所示。

第三类本底事例来自 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 + \pi^0/\eta$ 、 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 + \pi^0 \pi^0$ 、 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 + \pi^0/\eta$ 和 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 + \pi^0 \pi^0$ 等过程。这类事例的贡献由实验数据和 MC 样本共同估计。表 7.3 列出了第三类本底的估计值。估计过程如下。

 表 7.3 含有两个正确重建的 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 的本底事例 (第三类本底) 对信号过程的本底贡献。

N 为在实验数据中重建的事例数, ϵ 为重建效率, ϵ' 为误重建成 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 的效率, $N_B = N \times \epsilon'/\epsilon$ 为对信号过程的本底贡献。

本底过程	N	ϵ (10^{-4})	ϵ' (10^{-4})	N_B
$\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$	< 2.44 (90% CL)	24.0 ± 0.5	4.1 ± 0.2	< 0.4 (90% CL)
$\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \eta$	< 4.41 (90% CL)	77.5 ± 0.9	3.7 ± 0.2	< 0.2 (90% CL)
$\gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$	3.5 ± 3.5	1.75 ± 0.05	0.86 ± 0.03	1.7 ± 1.7
$\gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \eta$	< 7.97 (90% CL)	4.3 ± 0.2	$< 10^{-2}$	$O(0.01)$, 忽略
其他				忽略

1. $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 + \pi^0/\eta$

通过 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 在实验数据中的事例数、重建和误重建效率估计其对信号过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 的本底贡献。首先进行事例选择, 条件如下:

光子重建、径迹重建和 Λ 重建: 与章节 7.4.1 相同。

$\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 重建: 选取 $|M_{\text{rec}}^2(\gamma\gamma\Lambda\bar{\Lambda}) - m_{\pi^0}^2|$ 最小的 $\gamma\gamma\Lambda\bar{\Lambda}$ 组合, m_{π^0} 是 π^0 质量的 PDG 值^[10]。依据最小的 $|M(\gamma_i\Lambda) - m_{\Sigma^0}| + |M(\gamma_j\bar{\Lambda}) - m_{\Sigma^0}|$ 组合出 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 。

$\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 重建: 在剩余的光子中选出两个能量大于 100 MeV 的光子, 用于重建 π^0 。对选出的 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 进行运动学拟合, 将它们的四动量之和约束到正负电子对的四动量之和上。要求拟合的 $\chi^2 < 40$ 。若一个事例存在多个可能的 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 组合, 选取运动学拟合 χ^2 最小的组合。

经过事例选择后, 按照式 7.20 扣除 $\Sigma^0\text{-}\bar{\Sigma}^0$ 边带对 π^0 质量谱 $M(\gamma\gamma)$ 的贡献。通过拟合 $M(\gamma\gamma)$ 谱提取 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ 信号事例数, 如图 7.9 所示。用这种方法提取 MC 中成功重建的信号事例数, 得到 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ 的重建效率 $\varepsilon = (2.33 \pm 0.05) \times 10^{-3}$ 。在实验数据中, 没有通过选择条件的事例分布在 $M(\gamma\gamma) \in [85, 185] \text{ MeV}/c^2$ 区间, 如图 7.9 所示。根据文献^[156]估计事例数上限。定义 $M(\gamma\gamma) \in [110, 160] \text{ MeV}/c^2$ 为信号区, $M(\gamma\gamma) \in [85, 110] \cup [160, 185] \text{ MeV}/c^2$ 为边带区。这些区间的信号事例数均为零, 由此估计 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ 信号事例 (N) 的 90% 置信度上限值为 2.44。实验中产生的 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ 事例数为 $n = N/\varepsilon$, 故 n 的 90% 置信度上限值为 1047。将章节 7.4.1 中 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 的选择条件应用于 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ MC 样本, 并要求 $M_{\Sigma^0\bar{\Sigma}^0} < 3 \text{ GeV}/c^2$, 得出 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ 被误重建成 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 事例的效率 $\varepsilon' = (4.1 \pm 0.2) \times 10^{-4}$ 。 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ 过程贡献的本底事例数 $N_B = n \times \varepsilon' = N \times \varepsilon'/\varepsilon$ 。估计 $N_B < 0.4$ 。由于上限小于 1 个事例, 后续分析中假设 N_B 为零, 仅在系统误差中讨论其上限值的影响。上述分析的总结可见表 7.3。

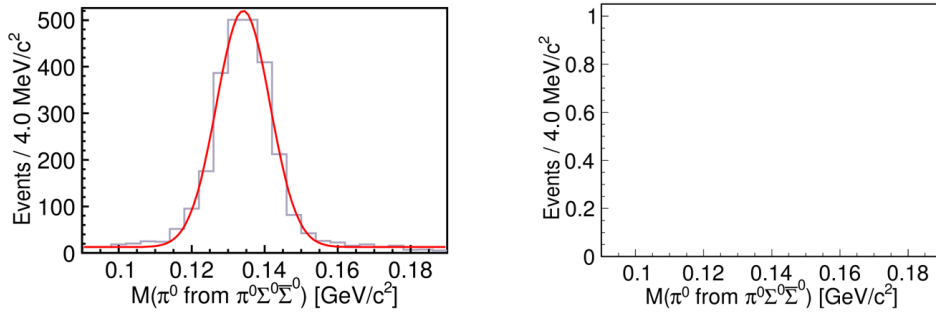


图 7.9 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ MC 样本中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图 (左) 和实验数据中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 分布 (右)。

$e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\eta$ 过程的贡献用类似方法估计。其对 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 贡献的本底事例数上限值为 0.2。本工作假设其贡献为零, 在系统误差中讨论其上限的影响。图 7.10 展示了 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0\eta$ MC 样本 η 质量谱的拟合图以及实验数据中的 η 质量谱。更多细节可见表 7.3。

2. $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^0\bar{\Sigma}^0 + \pi^0/\eta$

$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ 的贡献根据重建事例数、重建效率和误重建效率估计。事例选择条件如下:

光子重建、径迹重建和 Λ 重建: 与章节 7.4.1 相同。

$\Sigma^0\bar{\Sigma}^0\pi^0$ 重建: 选取 $|M_{\text{rec}}^2(\gamma\gamma\gamma\gamma\Lambda\bar{\Lambda})|$ 最小的 $\gamma\gamma\gamma\gamma\Lambda\bar{\Lambda}$ 组合。依据最小的 $|M(\gamma_i\Lambda) - m_{\Sigma^0}| + |M(\gamma_j\bar{\Lambda}) - m_{\Sigma^0}|$ 组合出 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 。要求剩余的两个光子的能量大于 100 MeV。用这两个光子重建 π^0 。

压低本底: 要求 $-1 \text{ GeV}^2/c^4 < M_{\text{rec}}^2(\gamma\gamma\Sigma^0\bar{\Sigma}^0) < 2 \text{ GeV}^2/c^4$ 以压低本底。

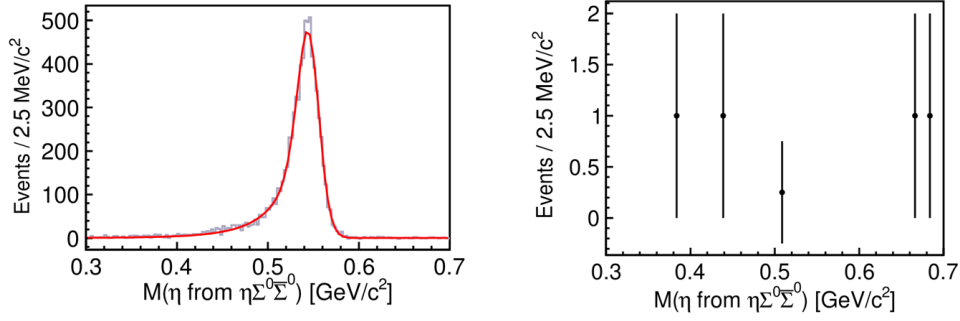


图 7.10 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \eta$ MC 样本中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图 (左) 和实验数据中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 分布 (右)。

经过事例选择后，用式 7.20 扣除 Σ^0 - $\bar{\Sigma}^0$ 边带对 π^0 质量谱 $M(\gamma\gamma)$ 的贡献。通过拟合 $M(\gamma\gamma)$ 谱提取 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 信号事例数，如图 7.11。最终估计 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 对 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 过程的贡献为 1.7 ± 1.7 个事例，详见表 7.3。当在 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 事例数中扣除 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 贡献时，假设这种本底平均分布在 $M(\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0)$ 谱上，范围从 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 阈值到 $3 \text{ GeV}/c^2$ 。

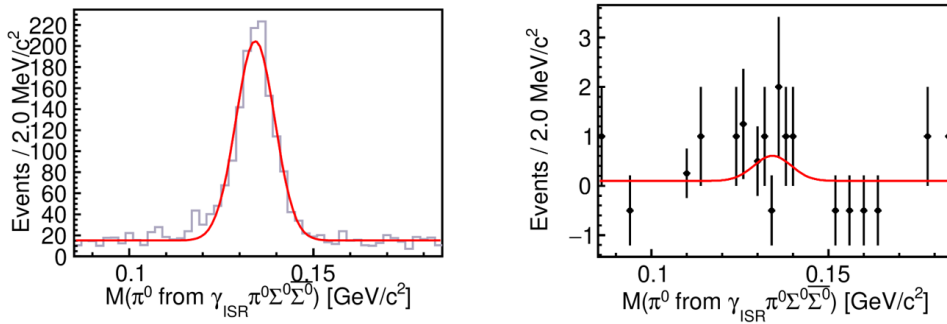


图 7.11 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ MC 样本 (左) 和实验数据 (右) 中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图。

$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \eta$ 过程的贡献由类似的方法估计。结果在 0.01 量级。后续分析完全忽略这种本底。图 7.12 是 η 质量谱。

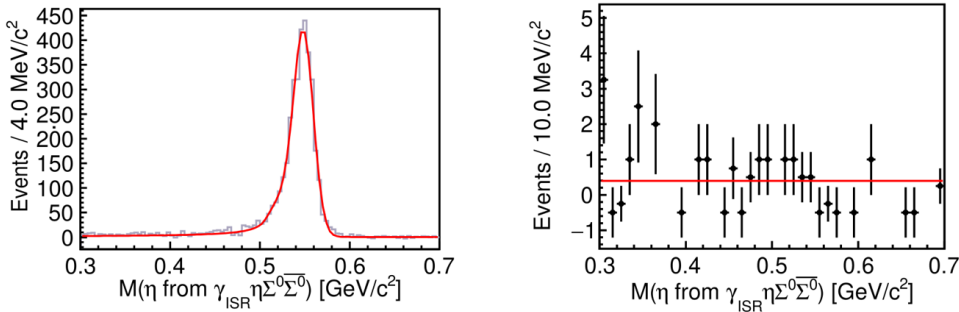


图 7.12 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \eta$ MC 样本 (左) 和实验数据 (右) 中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图。

3. 第三类本底中的其他成分

除上述本底, 第三类本底中还包含来自其他过程的事例。这些事例通过 Belle generic MC 中的 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ 和 $e^+e^- \rightarrow Y(4S)/Y(5S) \rightarrow B\bar{B}$ 样本估计。这些 MC 样本对应 4 ab^{-1} 的实验数据积分亮度。其中 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ 样本包含了树图阶的初态辐射模拟。这些样本中, 没有一个事例通过所有的选择条件。后续分析忽略这些本底的贡献。

7.4.3 截面与形状因子的测量

$e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 截面计算公式如下

$$\sigma = \frac{N_{\text{sig}}}{\epsilon L_{\text{eff}} [B(\Sigma^0 \rightarrow \gamma\Lambda) \times B(\Lambda \rightarrow p\pi^-)]^2}, \quad (7.21)$$

其中 N_{sig}, ϵ 和 L_{eff} 分别为信号事例数, 重建效率和有效亮度。衰变分支比 $B(\Sigma^0 \rightarrow \gamma\Lambda) = 100\%$, $B(\Lambda \rightarrow p\pi^-) = (63.9 \pm 0.5)\%$ ^[10]。

信号事例数 $N_{\text{sig}} = N_{\text{obs}} - N_{\text{bkg}}$ 。其中 N_{obs} 为 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 信号区 (图 7.7) 的总事例数, N_{bkg} 是 7.4.2 节估计的所有本底的贡献之和。

重建效率 ϵ 随能量变化的趋势如图 7.13 所示。 ϵ 用假设 $G_E = G_M$ 的信号 MC 样本 (见章节 7.3) 估计。从 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 阈值到 $3\text{ GeV}/c^2$, ϵ 基本没有变化, 用一个常数拟合。 ϵ 考虑了 PID(96.3%)^① 和 trigger(99.9%)^② 的效率修正。经过修正后, $\epsilon = (8.65 \pm 0.10) \times 10^{-4}$ ^③。

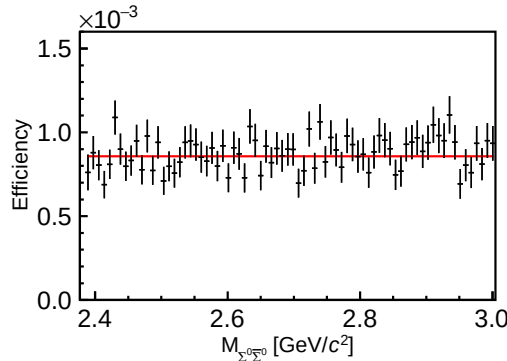


图 7.13 由信号 MC 得到的 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 重建效率随 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 不变质量的变化趋势。

有效亮度 L_{eff} 根据表 7.1 的积分亮度和 ISR 辐射概率 $W(s, x)$ 计算

$$L_{\text{eff}} = \sum_i L(\sqrt{s_i}) \times \int W(s_i, x) dx. \quad (7.22)$$

^①PID 和 trigger 系统对 MC 样本和对真实数据的效率可能稍有不同。PID 效率修正的研究基于 $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ 和 $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$ 样本, 并且考虑效率和动量大小和方向的关联性, 即对特定种类的粒子, 在特定的动量大小和角度区间, 都有对应的 PID 效率修正值。

^②详见见章节 C.1。

^③重建效率很低, 因为 85% 的 ISR 光子几乎与束流管平行, 无法进入探测器的接收度内。注意, 当 ISR 光子几乎与束流管平行时, 强子部分的总动量与 ISR 光子动量方向相反, 也与束流管平行, 如果强子部分的衰变没有释放很大的动能使得末态有大的横动量, 那么强子部分的末态也难以全部进入接收度内。此时, 不标记 ISR 光子的方法对重建效率的提升不大。本工作就属于这种情况。

计算有效亮度时, ISR 光子的极角范围为 0 到 180 度。

图 7.14 为 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 截面测量结果与 BaBar^[128] 和 BESIII^[157] 的比较。三个结果在误差范围内一致。本工作和 BaBar 没有考虑真空极化修正, 而 BESIII 的测量值包含真空极化修正。此处展示 BESIII 的测量值为 BESIII 文章中的测量值乘以真空极化修正因子。由此, 三个结果具有可比性。

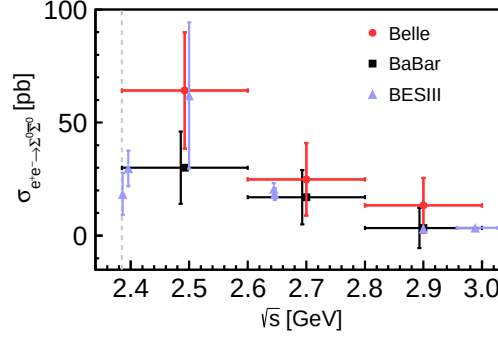


图 7.14 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 截面。

图中对比了本工作的测量结果与 BaBar 和 BESIII 的结果。本工作和 BaBar 没有考虑真空极化修正, 而 BESIII 的结果考虑了真空极化修正。此处展示 BESIII 的测量值为 BESIII 文章中的测量值乘以真空极化修正因子。由此, 图中三个实验组的测量值具有可比性。 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 过程的阈值由竖线标出。

表 7.4 列出了不同能量区间的事例数、重建效率、有效亮度、截面值和有效形状因子。形状因子由式 7.16 计算。信号事例数的误差为统计误差。重建效率的误差由拟合给出。截面值和形状因子的第一项误差为统计误差, 第二项误差为系统误差。

表 7.4 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 截面和有效形状因子。

$\sqrt{s}$ 为 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 质心能量, N_{sig} 为 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 信号事例数, ϵ 为重建效率, L_{eff} 为有效亮度, σ 为截面值, $|G_{\text{eff}}|$ 为有效形状因子。信号事例数的误差为统计误差。重建效率的误差由拟合给出。对于截面值和形状因子, 其第一项误差为统计误差, 第二项误差为系统误差。

$\sqrt{s}$ (GeV)	N_{sig}	ϵ (10^{-4})	L_{eff} (fb^{-1})	σ (pb)	$ G_{\text{eff}} $ ($\times 10^{-2}$)
2.385–2.600	10.7 ± 4.0	8.65 ± 0.10	0.4700	$64.2 \pm 24.6 \pm 7.6$	$10.4 \pm 2.0 \pm 0.6$
2.600–2.800	4.2 ± 2.7	8.65 ± 0.10	0.4775	$24.9 \pm 15.8 \pm 2.8$	$5.7 \pm 1.8 \pm 0.3$
2.800–3.000	2.4 ± 2.2	8.65 ± 0.10	0.5177	$13.4 \pm 12.0 \pm 2.1$	$4.1 \pm 1.8 \pm 0.3$

7.4.4 系统误差

截面的系统误差考虑了以下来源:

重建效率: 重建一条径迹的系统误差为 0.35%^[158-159], 重建四条径迹的系统误差为 1.4%。根据 $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ 和 $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$ 样本得到的 PID 总系统误差为

2.7%。根据 $B^+ \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda} K^+$ 样本^[160]得出重建一个 Λ 的系统误差为 2.7%^①。信号事例重建了两个 Λ ，其系统误差为 5.4%。数据和 MC 样本中 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 不变质量的分辨率不完全一致会引入系统误差。将 MC 样本中的 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 不变质量的分辨率增加 10%，重新计算重建效率，并与增加分辨率前的效率做对比，最终得出这项误差为 0.6%。

信号事例数：信号事例数的误差源自 N_{obs} 和 N_{bkg} 。对于 N_{obs} ，仅考虑统计误差。对于 N_{bkg} ，考虑本底估计方法带来的系统误差。对于第一、二类本底的估计 (边带法)，考虑由边带区域的选择和非线性本底带来的误差。将边带区域整体移动 $\pm 3 \text{ MeV}/c^2$ ，或同时改变边带区域的大小^②，重新计算第一、二类本底的贡献。此外，假设本底的形状与图 7.6 中的阴影直方图类似，重新计算第一、二类本底的贡献。将重新计算的贡献与原始贡献的最大差值作为系统误差，最终得出其值为 6%。第三类本底估计中的系统误差，主要来自本底形状的假设。章节 7.4.2 扣除本底时假设 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 本底的 $M_{\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0}$ 谱为平均分布。实际上， $M_{\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0}$ 谱可能存在阈值结构。受限于统计量，难以获取 $M_{\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0}$ 在阈值附近的准确形状。通过假设 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 本底的 $M_{\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0}$ 谱与信号过程的 $M_{\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0}$ 谱形状相同，估计存在阈值结构时的 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 本底贡献。将假设存在阈值结构时估计的贡献，与假设其为均匀分布时估计的贡献对比。由此得出本底形状假设的系统误差在 3%–9% 之间随 $\sqrt{s}$ 变化。对于来自 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \eta$ 本底贡献的系统误差。首先假设这些过程的 $M_{\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0}$ 谱为平均分布，对比这种本底的贡献为其上限值和这种本底的贡献为零时的 N_{sig} ，得到一个误差值。然后假设这些过程的 $M_{\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0}$ 谱与信号形状相同，用同样的方法得到另一个误差值。取这两个误差值中的最大值为 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \eta$ 本底贡献的系统误差。由此得出的系统误差在 2%–6% 之间随 $\sqrt{s}$ 变化。

有效亮度：有效亮度和积分亮度以及 ISR 辐射概率有关。积分亮度的误差为 1.4%，根据广角 Bhabha 散射样本估计。ISR 辐射概率的误差为 1%^[148-149]。

PHOKHARA 模拟：PHOKHARA 对 ISR 过程模拟的精度为 1%^[161]。取 1% 为 PHOKHARA 模拟带来的系统误差。

分支比： $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ 衰变分支比的误差为 0.8%^[10]。文献^[10]仅给出 $\Sigma^0 \rightarrow \gamma\Lambda$ 分支比为 100%，没给出误差。

重建效率的模型相关性：用于估计重建效率的 MC 样本根据假设的模型产生。于是，重建效率有模型相关性。为估计角分布假设带来的模型相关误差，产生两种极端情况的样本：其角分布 $n(\cos\theta) \propto 1 + a \cos^2\theta$ 中的 a 为 1 或 -1，分别对应 $G_E = 0$ 或 $G_M = 0$ 的情况。用两种 MC 计算重建效率，假设数据中 a 在

①这项系统误差考虑了误差和 Λ 动量的关联性。

②改变边带大小时，式 7.20 中对应的比例因子也相应地改变。

$[-1, 1]$ 区间平均分布。由此得出这一项系统误差在 3%–5% 之间随 $\sqrt{s}$ 变化。为估计 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 不变质量谱假设带来的误差，根据不同的不变质量谱产生 MC 样本，分别计算重建效率。通过对比这些重建效率，得出这一项误差在 1%–5% 之间随 $\sqrt{s}$ 变化。

Trigger 效率：基于不同 trigger 条件的控制样本，估计 trigger 效率为 $(94.7 \pm 2.3)\%$ ^①，其相对误差 3% 取为 trigger 带来的系统误差。详见附录 C.1。

由 MC 样本统计量带来的误差：此项系统误差已包含在重建效率的拟合误差中，约为 1% (表 7.4)。

表 7.5 总结了不同来源贡献的系统误差。假设上述列出的所有误差是无关的，通过平方和组合这些误差，得总系统误差在 11%–16% 之间随 $\sqrt{s}$ 变化。

表 7.5 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 截面测量的系统误差。

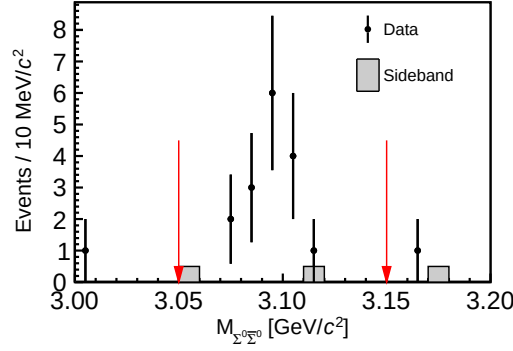
来源	系统误差
径迹重建	1.4%
PID	2.7%
Λ 重建	5.4%
$\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 质量分辨率	0.6%
边带法	6%
$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 \pi^0$ 本底	3%–9%
其他含有 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 的本底	2%–6%
积分亮度	1.4%
ISR 辐射概率	1%
PHOKHARA 模拟	1%
$\Lambda \rightarrow p\pi^-$ 分支比	0.8%
信号 MC 中角分布的模型相关性	3%–5%
信号 MC 中不变质量分布的模型相关性	1%–5%
Trigger	3%
效率的拟合	1%
总和	11%–16%

7.4.5 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 的分支比测量

实验数据中 J/ψ 峰附近的 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 不变质量谱如图 7.15 所示，可见清晰的 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 信号。用 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 边带 (见章节 7.4.2) 估计不含 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 的本底和仅含一个 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 的本底的贡献，对应图 7.15 中的灰色直方图。用 J/ψ 边带估计含有两个 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 的本底。 J/ψ 边带区为 $M(\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0) \in [3.00, 3.05] \text{ GeV}/c^2$ 和 $M(\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0) \in [3.15, 3.20] \text{ GeV}/c^2$ ， J/ψ 信号区为 $M(\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0) \in [3.05, 3.15] \text{ GeV}/c^2$ ，如图 7.15 所示。扣除 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 边带贡献和 J/ψ 边带贡献，得 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 信号事例数 (N_{sig}) 为 13.3 ± 3.9 。

根据式 7.23 计算 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 衰变分支比和 $J/\psi \rightarrow e^+e^-$ 衰变宽度之积。

^①MC 模拟中已经包含了 trigger 模拟，计算截面时无需额外乘 trigger 效率，只需要考虑 trigger 效率在 MC 和实验数据中的差别。


 图 7.15 实验数据中 J/ψ 峰附近的 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 不变质量谱。

点为 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 信号区的数据。直方图为用 $\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 边带估计的本底贡献。箭头标出了 J/ψ 信号区, $[3.05, 3.15] \text{ GeV}/c^2$ 。 J/ψ 边带区为 $[3.00, 3.05] \text{ GeV}/c^2$ 和 $[3.15, 3.20] \text{ GeV}/c^2$ 。

$$B(J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0) \cdot \Gamma_{ee}^{J/\psi} = \frac{N_{\text{sig}} \cdot m_{J/\psi}^2}{6\pi^2 \cdot \epsilon \cdot dL_{\text{eff}}/dE \cdot B^2(\Sigma^0 \rightarrow \gamma \Lambda) \cdot B^2(\Lambda \rightarrow p\pi^-)} \quad (7.23)$$

重建效率 ϵ 为 $(9.3 \pm 0.2) \times 10^{-4}$, 根据信号 MC 样本得到。信号 MC 样本中 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 的角分布为 $n(\cos \theta) \propto 1 + a \cos^2 \theta$, 其中 $a = -0.449 \pm 0.022^{[162]}$ 。 ϵ 包含了 PID 和 trigger 效率修正。 $dL_{\text{eff}}/dE = 2.793 \text{ pb}^{-1} \cdot \text{MeV}^{-1}$ 是 J/ψ 质量 $m_{J/\psi} = 3.0969 \text{ GeV}/c^2^{[10]}$ 处的有效亮度。

由此可得 $B(J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0) \cdot \Gamma_{ee}^{J/\psi} = (5.2 \pm 1.5 \pm 0.6) \text{ eV}/c^2$, 第一项误差为统计误差, 第二项误差为系统误差。对于系统误差, 考虑以下的来源: 径迹重建、PID、 Λ 重建、 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 质量重建、边带法、积分亮度、ISR 辐射概率、PHOKHARA 中的 ISR 模拟、 $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ 衰变分支比、参数 $a^{[162]}$ 、trigger 和 MC 样本的统计量。取 $\Gamma_{ee}^{J/\psi} = 5.55 \pm 0.11 \text{ keV}/c^2^{[10]}$, 得 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 衰变分支比为 $(0.94 \pm 0.27 \pm 0.10) \times 10^{-3}$ 。第一项误差为统计误差, 第二项为系统误差。系统误差中包含了 $\Gamma_{ee}^{J/\psi}$ 的相对误差, 约为 2%。测量结果和 PDG 值 $(1.172 \pm 0.032) \times 10^{-3}^{[10]}$ 一致。

7.5 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$

7.5.1 事例重建与选择

对于 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$, 要求重建 ISR 光子, 通过 $\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0$, $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 完全重建 Σ^+ 和 $\bar{\Sigma}^-$ 。事例选择条件如下。

光子选择和 ISR 光子标记: 与章节 7.4.1 相同。

径迹数与带电粒子鉴别: 事例的径迹数严格等于 2。带电粒子鉴别与章

节 7.4.1 相同。

π^0 重建: π^0 用两个能量大于 30 MeV 的光子重建。两个光子的不变质量 $M(\gamma\gamma)$ 须大于 $100 \text{ MeV}/c^2$, 小于 $150 \text{ MeV}/c^2$ 。这个区间对应 3 倍 π^0 质量分辨率^①。为提升 π^0 的动量分辨率, 通过拟合将 π^0 质量约束到其 PDG 值。要求拟合的 χ^2 小于 50。

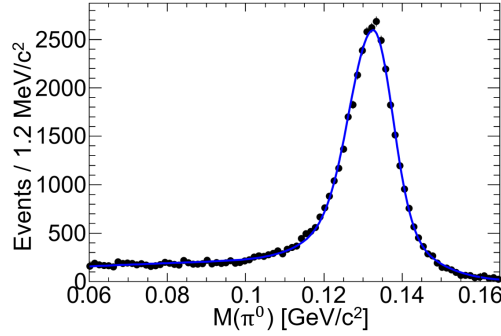


图 7.16 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ MC 中正确重建的 π^0 的 $M(\gamma\gamma)$ 分布图。

图中用双高斯分布和两个分叉高斯分布拟合了 $M(\gamma\gamma)$ 谱。

$\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 重建: 用 $p \bar{p} \pi^0 \pi^0$ 重建 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 。当事例中有多个 $p \bar{p} \pi^0 \pi^0$ 组合时, 选用 $|M_{\text{rec}}^2(p \bar{p} \pi^0 \pi^0)|$ 最小的组合。 $p \bar{p} \pi^0 \pi^0$ 有两种方式组合成 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$, 取 $|M(p\pi_i^0) - m_{\Sigma^+}| + |M(\bar{p}\pi_j^0) - m_{\Sigma^+}|$ 最小的组合。其中 m_{Σ^+} 为 Σ^+ 质量的 PDG 值^[10], π_i^0 和 π_j^0 指代不同 π^0 。

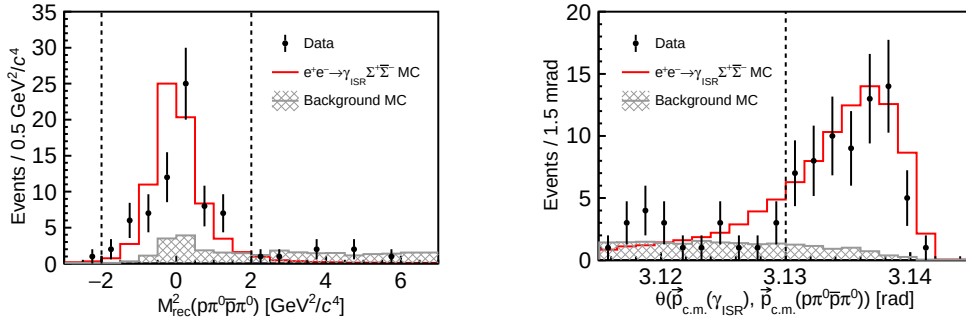
压低本底: 为进一步压低本底, 要求 $-2 \text{ GeV}^2/c^4 < M_{\text{rec}}^2(p\pi^0 \bar{p}\pi^0) < 2 \text{ GeV}^2/c^4$ 。在正负电子质心系中, ISR 光子和 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 动量方向的夹角 $\theta(\vec{p}_{\text{c.m.}}(\gamma_{\text{ISR}}), \vec{p}_{\text{c.m.}}(p\pi^0 \bar{p}\pi^0))$ 大于 3.13 rad。图 7.17 用竖线标出这两个条件。图中点代表数据, 红直方图代表信号 MC。这两个分布集中在 $M_{\text{rec}}^2(p\pi^0 \bar{p}\pi^0) = 0 \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\theta(\vec{p}_{\text{c.m.}}(\gamma_{\text{ISR}}), \vec{p}_{\text{c.m.}}(p\pi^0 \bar{p}\pi^0)) = \pi \text{ rad}$ 附近^②。阴影直方图是几种本底 MC 样本的总贡献。阴影直方图在 $M_{\text{rec}}^2(p\pi^0 \bar{p}\pi^0) = 0 \text{ GeV}^2/c^4$ 附近的峰对应 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^- + \pi^0/\eta$, 其余本底在 $M_{\text{rec}}^2(p\pi^0 \bar{p}\pi^0)$ 谱上平滑分布。所有本底在 $\theta(\vec{p}_{\text{c.m.}}(\gamma_{\text{ISR}}), \vec{p}_{\text{c.m.}}(p\pi^0 \bar{p}\pi^0))$ 谱上平滑分布。

经上述事例选择, 候选样本中 $p\pi^0$ 与 $\bar{p}\pi^0$ 的质量分布如图 7.18。图中可见清晰的 $\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 信号。点代表数据, 红直方图代表信号 MC 中成功重建 Σ^+ 或 $\bar{\Sigma}^-$ 的事例, 阴影直方代表本底贡献之和^③。

^① $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 事例中的 π^0 质量谱是不对称的 (如图 7.16)。光子能量分辨的不对称会导致 π^0 质量谱的不对称。此外, Σ^+ 有不可忽略的飞行距离。本工作未对 Σ^+ 进行次级顶点拟合, 所有粒子的衰变顶点都假设为对撞点 (IP)。 π^0 重建顶点和其真正衰变顶点的差别也会导致 π^0 质量谱不对称。

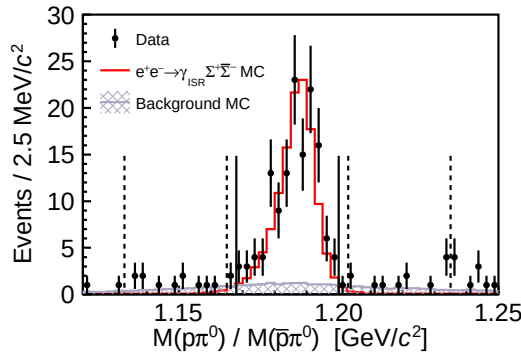
^② 图 7.17 中, 数据和信号 MC 的 $M_{\text{rec}}^2(p\pi^0 \bar{p}\pi^0)$ 分布稍有偏移, 在当前统计量下, 考虑这种偏移和统计涨落以及直方图的分 bin 有关。

^③ 阴影直方图包含 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} p \bar{p} \pi^0 \pi^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{p} \pi^0$ MC 样本事例。阴影直方图还包含信号 MC 中 Σ^+ 或 $\bar{\Sigma}^-$ 没被正确重建的事例, 这种事例主要因用假 π^0 和真 $p/\bar{p}$ 组合导致 $\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 重建失败。阴影直方图


 图 7.17 $M_{\text{rec}}^2(p\pi^0\bar{p}\pi^0)$ 和 $\theta(\vec{p}_{\text{c.m.}}(\gamma_{\text{ISR}}), \vec{p}_{\text{c.m.}}(p\pi^0\bar{p}\pi^0))$ 分布。

点代表实验数据，红直方图代表 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 过程的 MC，阴影直方图代表几种本底 MC 样本的总贡献。图中事例已通过除对 $M_{\text{rec}}^2(p\pi^0\bar{p}\pi^0)$ 或 $\theta(\vec{p}_{\text{c.m.}}(\gamma_{\text{ISR}}), \vec{p}_{\text{c.m.}}(p\pi^0\bar{p}\pi^0))$ 的要求以外的所有事例选择条件。本底 MC 的直方图仅画出形状做定性分析。定量分析见章节 7.5.2。 $-2 \text{ GeV}^2/c^4 < M_{\text{rec}}^2(p\pi^0\bar{p}\pi^0) < 2 \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\theta(\vec{p}_{\text{c.m.}}(\gamma_{\text{ISR}}), \vec{p}_{\text{c.m.}}(p\pi^0\bar{p}\pi^0)) > 3.13 \text{ rad}$ 用竖线标出。

定义 $M(p\pi^0) \in [1.168, 1.200] \text{ GeV}/c^2$ 为 Σ^+ 信号区，定义 $M(p\pi^0) \in [1.133, 1.165] \text{ GeV}/c^2$ 和 $M(p\pi^0) \in [1.203, 1.235] \text{ GeV}/c^2$ 为边带区，如图 7.18 所示。图 7.19 为实验数据中 $M(p\pi^0)$ 和 $M(\bar{p}\pi^0)$ 的二维分布， $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 信号事例在图中央聚集。图中用实线正方形和虚线正方形标出了信号区和二维边带区。

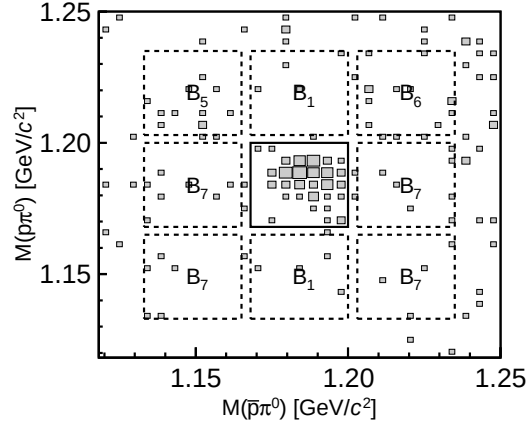

 图 7.18 通过事例筛选的样本中，用于重建 $\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 的 $p\pi^0/\bar{p}\pi^0$ 不变质量谱。

点代表实验数据，红直方图代表 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ MC 中成功重建 $\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 的事例。阴影直方图包含 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} p\bar{p}\pi^0\pi^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{p}\pi^0$ MC 事例，以及 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ MC 中 $\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 没被正确重建的事例。 $\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 信号区和边带区分别用竖实线和竖虚线标出。

图 7.20 是数据中的 $M_{\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-}$ 谱。在 $3 \text{ GeV}/c^2$ 以下，观测到 40 个事例。在 $3 \text{ GeV}/c^2$ 以上，观测到 27 个事例，主要是 $J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 衰变。从阈值到 $3 \text{ GeV}/c^2$ ， $M_{\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-}$ 分辨率从 $3 \text{ MeV}/c^2$ 逐渐变化为 $15 \text{ MeV}/c^2$ 。 $M_{\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-}$ 的偏移小于 $2 \text{ MeV}/c^2$ ^①。

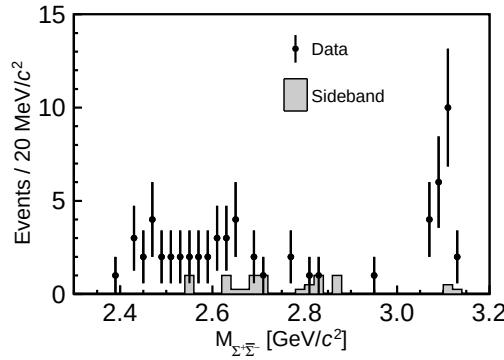
中三种成分的形状相似。在 MC 研究中，假设 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} p\bar{p}\pi^0\pi^0$ ， $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{p}\pi^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 截面之比为 1 : 1 : 1。

^① 详见附录 C.2。


 图 7.19 实验数据的 $M(p\pi^0)$ 和 $M(\bar{p}\pi^0)$ 二维分布。

实线正方形代表信号区，虚线正方形 B_i ($i = 1, \dots, 8$) 代表边带区。

本工作不考虑分辨率的修正^①。


 图 7.20 实验数据中的 $M_{\Sigma^+\Sigma^-}$ 谱。

点为 $\Sigma^+\Sigma^-$ 信号区事例的分布，直方图为用 $\Sigma^+\Sigma^-$ 边带区事例估计的本底贡献。

7.5.2 本底分析

$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 过程的本底事例可能含有零个，一个或者两个正确重建的 $\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 。由此将本底分为三类。第一、二类对应 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} p \pi^0 \bar{p} \pi^0 X$ 、 $e^+e^- \rightarrow p \pi^0 \bar{p} \pi^0 X + \pi^0/\eta$ 、 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{p} \pi^0 X$ 和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{p} \pi^0 X + \pi^0/\eta$ 过程。没有完全正确重建 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的信号 MC 事例也属于此类。第三类本底包含 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^- + \pi^0/\eta$ 和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^- + \pi^0/\eta$ 等过程。与章节 7.4.2 类似，用边带法估计第一、二类本底。用实验数据和 MC 样本估计含第三类本底。表 7.6 列出了第三类本底贡献的估计值。估计过程如下。

^①表 7.7 列出了中用于计算截面的区间，其宽度远大于 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 不变质量的分辨率。

表 7.6 含有两个正确重建的 Σ^+/Σ^- 的本底事例 (第三类本底) 对信号过程的本底贡献。

N 为在实验数据中重建的事例数, ϵ 为重建效率, ϵ' 为误重建成 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \Sigma^-$ 的效率, $N_B = N \times \epsilon' / \epsilon$ 为对信号过程的本底贡献。

Channel	N	ϵ (10^{-4})	ϵ' (10^{-4})	N_B
$\Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$	< 4.36 (90% CL)	41.9 ± 0.7	4.3 ± 0.2	< 0.4 (90% CL)
$\Sigma^+ \Sigma^- \eta$	< 6.42 (90% CL)	172 ± 1	0.22 ± 0.05	$O(0.01)$, 忽略
$\gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$	< 10.2 (90% CL)	0.85 ± 0.05	0.13 ± 0.02	< 1.6 (90% CL)
$\gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \Sigma^- \eta$	< 17.5 (90% CL)	5.48 ± 0.08	$< 10^{-2}$	$O(0.01)$, 忽略
其他				忽略

1. $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- + \pi^0/\eta$

通过 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$ 在实验数据中的事例数、重建和误重建效率估计其对信号过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \Sigma^-$ 的本底贡献。事例选择条件如下:

光子重建、径迹重建、 π^0 重建: 与章节 7.5.1 相同。

$\Sigma^+ \Sigma^-$ 重建: 用 $p\bar{p}\pi^0\pi^0$ 重建 $\Sigma^+ \Sigma^-$ 。当一个事例有多个 $p\pi^0\bar{p}\pi^0$ 组合时, 保留 $|M_{\text{rec}}^2(p\pi^0\bar{p}\pi^0) - m_{\pi^0}^2|$ 最小的组合。其中 m_{π^0} 为 π^0 质量的 PDG 值 [10]。根据最小的 $|M(p\pi_i^0) - m_{\Sigma^+}| + |M(\bar{p}\pi_j^0) - m_{\Sigma^-}|$ 重建 $\Sigma^+ \Sigma^-$ 。

$\Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$ 重建: 在事例剩余的光子中, 选出两个能量大于 100 MeV 的光子与 $\Sigma^+ \Sigma^-$ 组合。对 $\Sigma^+ \Sigma^- \gamma\gamma$ 进行运动学拟合, 将它们的四动量之和约束到正负电子对的四动量之和上。要求运动学拟合的 $\chi^2 < 20$ 。当事例中存在两个以上能量大于 100 MeV 的剩余光子, 选取 χ^2 最小的 $\Sigma^+ \Sigma^- \gamma\gamma$ 组合, 并用这个组合中的 $\gamma\gamma$ 重建 π^0 。

经过事例选择后, 按照式 7.20 扣除 $\Sigma^+ \Sigma^-$ 边带对 π^0 质量谱 $M(\gamma\gamma)$ 的贡献。通过拟合 $M(\gamma\gamma)$ 谱提取 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$ 信号事例数, 如图 7.21 所示。用这种方法提取 MC 中正确重建的信号事例数, 得到 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$ 的重建效率 $\epsilon = (4.19 \pm 0.07) \times 10^{-3}$ 。将 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \Sigma^-$ 的事例选择条件应用于 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$ 的 MC 样本, 得 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$ 被误重建成 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \Sigma^-$ 的效率 $\epsilon' = (4.3 \pm 0.2) \times 10^{-4}$ 。实验数据中, 在 $M(\gamma\gamma) \in [110, 160] \text{ MeV}c^2$ 区间仅有一个事例, 在 $M(\gamma\gamma) \in [85, 110] \text{ or } [160, 185] \text{ MeV}c^2$ 区间没有事例, 如图 7.21 所示。根据文献 [163], $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$ 信号事例数的 90% 置信度上限为 4.36。估计 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$ 贡献的本底事例数 $N_B < 0.4$ 。仅在系统误差中讨论这种本底的影响。类似地, 估计 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- \eta$ 贡献的本底事例数在 $O(0.01)$ 量级。在后续的分析中忽略这种本底。图 7.22 为 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- \eta$ MC 和数据中的 η 质量谱。上述分析的总结见表 7.6。

2. $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^- + \pi^0/\eta$

$e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \Sigma^- \pi^0$ 样本的选择条件如下:

光子重建、径迹重建、 π^0 重建: 与章节 7.5.1 相同。

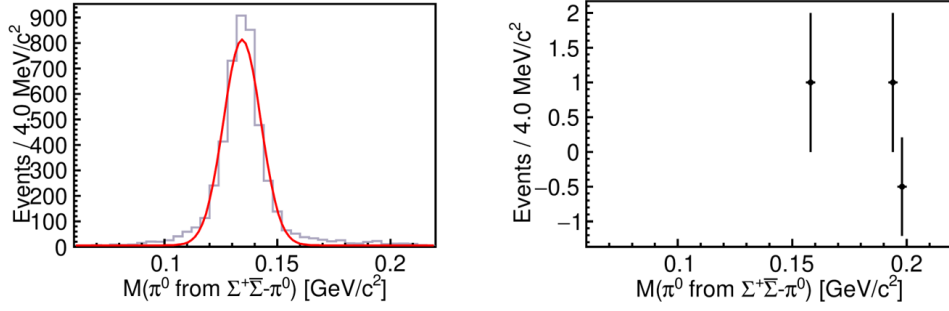


图 7.21 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-\pi^0$ MC 样本中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图 (左) 和实验数据中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 分布 (右)。

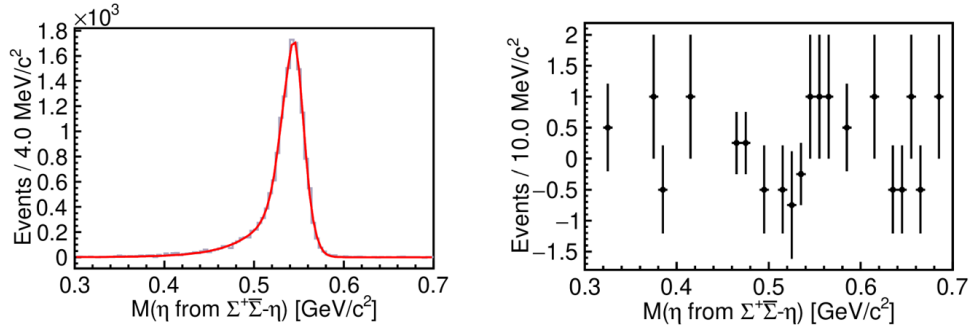


图 7.22 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-\eta$ MC 样本中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图 (左) 和实验数据中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 分布 (右)。

$\Sigma^+\bar{\Sigma}^-\pi^0$ 重建: 选取 $|M_{\text{rec}}^2(\gamma\gamma p\bar{p}\pi^0\pi^0)|$ 最小的 $\gamma\gamma p\bar{p}\pi^0\pi^0$ 组合。其中 $\gamma\gamma$ 为额外的两个能量大于 100 MeV 的光子。根据最小的 $|M_{\text{rec}}^2(\gamma\gamma p\pi^0\bar{p}\pi^0)|$ 和最小的 $|M(p\pi_i^0) - m_{\Sigma^+}| + |M(\bar{p}\pi_j^0) - m_{\Sigma^+}|$ 重建 $\Sigma^+\bar{\Sigma}^-\pi^0$ 。

压低本底: 要求 $-2 \text{ GeV}^2/c^4 < M_{\text{rec}}^2(\gamma\gamma p\pi^0\bar{p}\pi^0) < 2 \text{ GeV}^2/c^4$ 以压低本底。

事例选择后, 扣除 $\Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 边带对 $M(\gamma\gamma)$ 谱的贡献。通过拟合 $M(\gamma\gamma)$ 谱提取 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^+\bar{\Sigma}^-\pi^0$ 事例数, 如图 7.23 所示。估计 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^+\bar{\Sigma}^-\pi^0$ 贡献的本底事例数上限为 1.6, 仅在系统误差中讨论这种本底的影响。类似地, 估计 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^+\bar{\Sigma}^-\eta$ 贡献的本底事例数在 $O(0.01)$ 量级。图 7.24 为数据和 MC 中的 η 谱。后续分析忽略这种本底。更多细节见表 7.6。

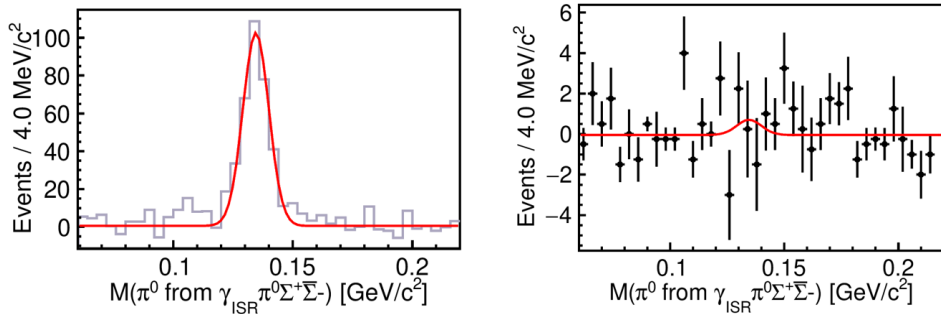
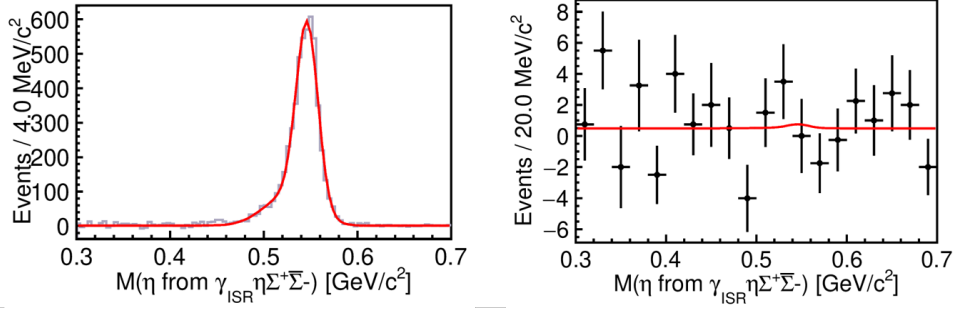


图 7.23 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^+\bar{\Sigma}^-\pi^0$ MC 样本 (左) 和实验数据 (右) 中的 $M(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图。


 图 7.24 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^- \eta$ MC 样本 (左) 和实验数据 (右) 中的 $M(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ 谱拟合图。

3. 第三类本底中的其他成分

对于第三类本底中的其他成分，用 Belle generic MC 中的 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ 和 $e^+e^- \rightarrow Y(4S)/Y(5S) \rightarrow B\bar{B}$ 样本估计。这些 MC 样本对应 4 ab^{-1} 的实验数据积分亮度。没有一个事例通过所有的选择条件。在后续的分析中忽略这部分的本底贡献。

7.5.3 截面与形状因子的测量

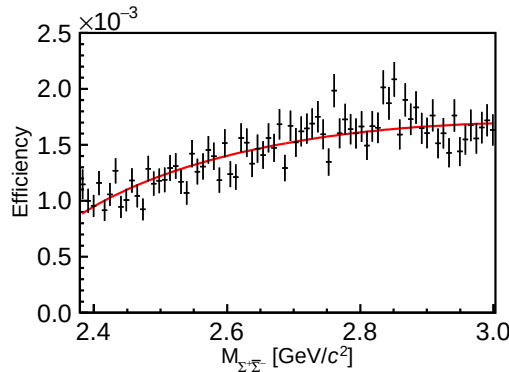
截面计算公式如下

$$\sigma = \frac{N_{\text{sig}}}{\epsilon L_{\text{eff}} [B(\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0)B(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)]^2} \quad (7.24)$$

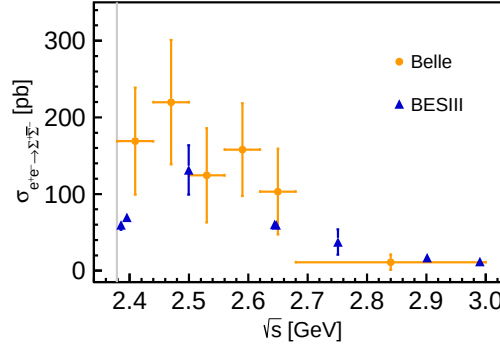
信号事例数 N_{sig} 和有效亮度 L_{eff} 的计算同章节 7.4.3。用信号过程的 MC 得到的重建效率 ϵ 随 $M_{\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-}$ 变化的趋势如图 7.25 所示。用阈值函数拟合 ϵ ：

$$\epsilon(m) = n \times ((m - m_0)^{1/2} + a \times (m - m_0)^{2/3}) \quad (7.25)$$

n , m_0 和 a 为拟合参数。PID 效率修正为 98.9%。Trigger 效率修正为 100.7%。


 图 7.25 由信号 MC 得到的 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 重建效率随 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 不变质量的变化趋势。

$e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 截面测量结果与 BESIII^[135] 一致，如图 7.26 所示。本工作未考虑真空极化修正，BESIII 的测量值包含真空极化修正。此处展示的 BESIII 的测量值为 BESIII 文章中的测量值乘以真空极化修正因子。本工作首次报道了 $\sqrt{s} \in (2.4, 2.5)$ 和 $\sqrt{s} \in (2.5, 2.6) \text{ GeV}$ 区间的 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 截面。


 图 7.26 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 截面。

图中对比了本工作的测量结果和 BESIII 的结果。BESIII 文章中的测量值含对真空极化的修正，本工作没有考虑对真空极化的修正。此处展示的 BESIII 的测量值为 BESIII 文章中的测量值乘以真空极化修正因子。由此，两组结果具有可比性。 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 过程的阈值由竖线标出。

表 7.7 列出了不同 $\sqrt{s}$ 区间的事例数、重建效率、有效亮度、截面值和有效形状因子。表中，效率的误差由拟合得到。信号事例数的误差为统计误差。截面值和形状因子的第一项误差是统计误差，第二项是系统误差。

 表 7.7 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 截面和有效形状因子。

$\sqrt{s}$ 为 $\Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 质心能量， N_{sig} 为 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 信号事例数， ϵ 为重建效率， L_{eff} 为有效亮度， σ 为截面值， $|G_{\text{eff}}|$ 为有效形状因子。信号事例数的误差为统计误差。重建效率的误差由拟合给出。截面值和形状因子的第一项误差为统计误差，第二项误差为系统误差。

$\sqrt{s}$ (GeV)	N_{sig}	$\epsilon(10^{-3})$	$L_{\text{eff}} (\text{fb}^{-1})$	σ (pb)	$ G_{\text{eff}} (\times 10^{-2})$
2.379–2.440	5.5 ± 2.1	0.98 ± 0.04	0.1285	$168.9 \pm 64.2 \pm 27.3$	$20.9 \pm 4.0 \pm 1.7$
2.440–2.500	8.5 ± 2.9	1.15 ± 0.02	0.1298	$219.8 \pm 73.7 \pm 34.1$	$19.3 \pm 3.2 \pm 1.5$
2.500–2.560	5.5 ± 2.6	1.28 ± 0.02	0.1333	$124.4 \pm 58.2 \pm 19.8$	$13.4 \pm 3.1 \pm 1.1$
2.560–2.620	7.8 ± 2.7	1.38 ± 0.02	0.1368	$158.0 \pm 54.7 \pm 26.0$	$14.5 \pm 2.5 \pm 1.2$
2.620–2.680	5.5 ± 2.9	1.46 ± 0.02	0.1403	$103.1 \pm 53.4 \pm 16.6$	$11.4 \pm 3.0 \pm 0.9$
2.680–3.000	3.8 ± 3.3	1.62 ± 0.02	0.8089	$11.0 \pm 9.6 \pm 3.1$	$3.7 \pm 1.6 \pm 0.5$

7.5.4 系统误差

截面的系统误差考虑了以下来源：

重建效率：径迹重建的系统误差为 0.7% 的。PID 的系统误差为 1.2%。 π^0 重建的系统误差为 4%^①。用与章节 7.4.4 类似的方法，估计数据和 MC 中 $\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 质量分辨的差别带来的系统误差为 0.1%。

信号事例数：第一、二类本底估计中，边带区的选择和非线性成分总共带来 10% 的系统误差。对于第三类本底的上限带来的系统误差，首先假设其贡献为平均分布，计算一个误差值。然后假设其贡献的分布与 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$

^①根据文献^[164]对 $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ 的研究，每重建一个 π^0 带来的系统误差为 8%。

的分布相同，计算另一个误差值。取较大者为系统误差。这项系统误差在 $\sqrt{s} \in [2.379, 2.680] \text{ GeV}$ 区间为 5%。在 $\sqrt{s} \in [2.68, 3.00] \text{ GeV}$ 区间为 23%。 $\sqrt{s} \in [2.68, 3.00] \text{ GeV}$ 区间的信号事例很少。

有效亮度：同章节 7.4.4，积分亮度系统误差为 1.4%，ISR 辐射概率的系统误差为 1%。

PHOKHARA 模拟：1%，同章节 7.4.4。

分支比： $\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0$ 和 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 衰变分支比的相对误差分别为 0.58% 和 0.03%^[10]。

重建效率的模型相关性：用与章节 7.4.4 类似的方法，得角分布假设的系统误差在 1%–5% 随 $\sqrt{s}$ 变化，不变质量谱假设的系统误差在 3%–9% 之间随 $\sqrt{s}$ 变化。此外，根据 BESIII 实验在三个能量点附近测得的 $|G_E/G_M|$ 产生 MC，估计出在这三个能量点附近角分布假设带来的系统误差约为 5%，与前面估计的 1%–5% 一致。

Trigger 效率：trigger 效率为 $(89.6 \pm 4.2\%)$ 。取相对误差 5% 为 trigger 带来的系统误差。详见附录 C.1。

由 MC 样本统计量带来的误差：此项误差已包含在重建效率的拟合误差中 (表 7.7)，其大小约为 1%。

各项来源的系统误差总结如表 7.8。假设上述列出的所有误差都是无关的，用平方和组合得总系统误差在 16%–28% 之间随 $\sqrt{s}$ 变化。 $\sqrt{s} \in [2.68, 3.00] \text{ GeV}$ 区间的总系统误差为 28%，主要来源于第三类本底。这个区间的统计误差很大。

表 7.8 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 截面测量的系统误差。

来源	系统误差
径迹重建	0.7%
PID	1.2%
π^0 重建	8%
$\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 质量分辨率	0.1%
边带法	10%
含有 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的本底	5%–23%
积分亮度	1.4%
ISR 辐射概率	1%
PHOKHARA 模拟	1%
分支比	1.2%
信号 MC 中角分布的模型相关性	1%–5%
信号 MC 中不变质量分布的模型相关性	3%–9%
Trigger	5%
效率的拟合	1%–4%
总和	16%–28%

7.5.5 $J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的分支比测量

J/ψ 峰附近的 $M_{\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-}$ 谱如图 7.27 所示。可见清晰的 $J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 信号。 J/ψ 信号区的定义与章节 7.4.5 相同。用章节 7.4.5 中的方法扣除本底后，得到 $J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的信号事例数为 20.8 ± 4.7 。

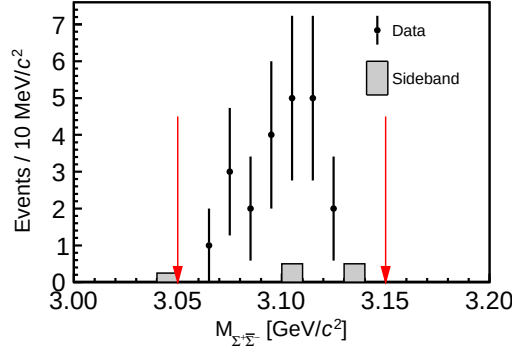


图 7.27 实验数据中 J/ψ 峰附近的 $M_{\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-}$ 谱。

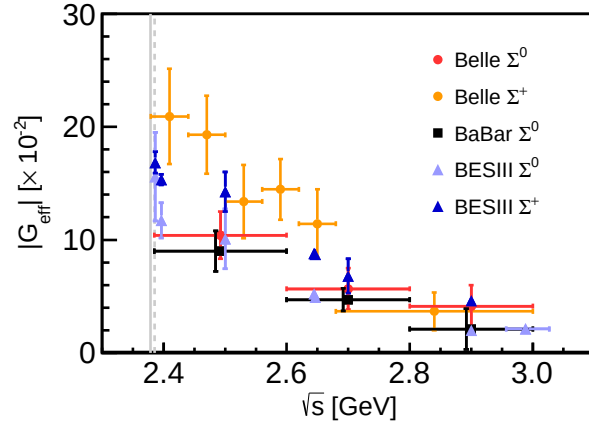
点是 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 信号区间的数据。直方图是用 $\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 边带区事例估计的本底。箭头标出了 J/ψ 信号区 $[3.05, 3.15] \text{ GeV}/c^2$ 。 J/ψ 边带区为 $[3.00, 3.05]$ 和 $[3.15, 3.20] \text{ GeV}/c^2$ 。

重建效率 $\epsilon = (1.76 \pm 0.03) \times 10^{-3}$ ，根据信号 MC 样本得到。MC 样本中 $J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的角分布为 $n(\cos \theta) \propto 1 + a \cos^2 \theta$ ，其中 $a = -0.508 \pm 0.007^{[165]}$ 。 ϵ 考虑了 PID 效率修正和 trigger 效率修正。用章节 7.4.5 中的方法，得乘积 $B(J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-) \cdot \Gamma_{ee}^{J/\psi} = (6.8 \pm 1.5 \pm 0.8) \text{ eV}/c^2$ 。第一项误差为统计误差，第二项误差为系统误差。系统误差考虑了来自径迹重建、PID、 π^0 重建、 $\Sigma^+/\bar{\Sigma}^-$ 质量分辨、边带法、积分亮度、ISR 辐射概率、PHOKHARA 模拟、分支比、参数 $a^{[165]}$ 、trigger 和 MC 样本统计量的贡献。取 $\Gamma_{ee}^{J/\psi} = 5.55 \pm 0.11 \text{ keV}/c^2^{[10]}$ ，考虑 $\Gamma_{ee}^{J/\psi}$ 的误差，得分支比 $B(J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-) = (1.22 \pm 0.28 \pm 0.14) \times 10^{-3}$ ，和 PDG 值 $(1.07 \pm 0.04) \times 10^{-3}^{[10]}$ 一致。

7.6 总结和讨论

本工作用初态辐射方法，测量了从 $\Sigma \bar{\Sigma}$ 产生阈值到 $3 \text{ GeV}/c^2$ 的 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 反应截面，首次测量了 $\sqrt{s} \in (2.4, 2.5)$ 和 $\sqrt{s} \in (2.5, 2.6) \text{ GeV}$ 区间的 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 截面。从截面测量值中提取了有效形状因子 $|G_{\text{eff}}|$ 。图 7.28 为测量结果与 BaBar^[128] 和 BESIII^[135-136] 结果的对比。所有结果在误差范围内一致。

基于 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} J/\psi$ ， $J/\psi \rightarrow \Sigma \bar{\Sigma}$ 事例，测量了 J/ψ 衰变分支比与 $J/\psi \rightarrow$


 图 7.28 Σ^+ 和 Σ^0 的有效形状因子。

图中对比了本工作的测量结果与 BaBar 和 BESIII 的结果。本工作和 BaBar 都没有考虑对真空极化的修正，而 BESIII 考虑了对真空极化的修正。此处展示的 BESIII 的测量值为 BESIII 文章中的测量值乘以真空极化修正因子的平方根。由此，图中三个实验组的测量值具有可比性。 $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 和 $\Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 的产生阈值分别由虚竖线和实竖线标出。

e^+e^- 轻子宽度之积：

$$B(J/\psi \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0) \cdot \Gamma_{ee}^{J/\psi} = (5.2 \pm 1.5 \pm 0.6) \text{ eV}/c^2, \\ B(J/\psi \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-) \cdot \Gamma_{ee}^{J/\psi} = (6.8 \pm 1.5 \pm 0.8) \text{ eV}/c^2.$$

根据文献^[10] $\Gamma_{ee}^{J/\psi} = 5.55 \pm 0.11 \text{ keV}/c^2$ ，得衰变分支比

$$B(J/\psi \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0) = (0.94 \pm 0.27 \pm 0.10) \times 10^{-3}, \\ B(J/\psi \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-) = (1.22 \pm 0.28 \pm 0.14) \times 10^{-3}.$$

结果与 PDG 值一致，验证了截面测量方法的可靠性。

本工作的统计量偏低，难以可靠地判断 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ 的截面是否与 pQCD 因子化和 VMD 等模型偏离。文献^[145]联合拟合本工作、BaBar 和 BESIII 的 Σ 类时形状因子测量结果，发现在 VMD 模型中仅需要加入 ρ 、 ω 和 ϕ 介子就可以同时描述 Σ^+ 、 Σ^0 和 Σ^- 的类时形状因子，无需加入额外的矢量介子。文献^[130]尝试通过联合拟合提取同位旋标量和同位旋矢量成分对电磁形状因子的贡献，结果符合理论预期。同时也应注意到，文献^[130,145]的拟合图中，由本工作首次测得的 $\sqrt{s} \in (2.4, 2.5)$ 和 $\sqrt{s} \in (2.5, 2.6) \text{ GeV}$ 的 Σ^+ 类时形状因子，与根据 BESIII 结果得到的模型稍有不同。文献^[145]也提到，在单独拟合 BESIII 的数据点后，加入 Belle 和 BaBar 的数据点，拟合的 χ^2/ndf 增大了 0.5 左右。个人认为除统计涨落外有两种可能，第一是 ISR 方法的确会造成一些偏移；第二是在 BESIII 能量点覆盖的区域之外，存在基础的 pQCD 因子化和 VMD 模型无法描述的行为。

Belle II 实验和 STCF 实验^[166]的正负电子对撞机的设计亮度比上一代实验高一到两个量级。在这些实验上测量奇异重子电磁形状因子，将会得到更为精确的结果。统计量提高不仅能使统计误差减小，而且能令本底和探测器性能的研究更加精确，使系统误差下降。

以上成果已发表在 Physical Review D 107, 072008 (2023) 上。

第 8 章 总结和展望

本文基于 Belle 和 BelleII 实验的数据, 用模型无关方法得到了正负电子对撞机上最精确的 $D^0-\bar{D}^0$ 混合参数测量结果, 这也是正负电子对撞机上首个模型无关测量结果。本文使用的模型无关测量方法与 LHCb 实验使用的模型无关测量方法不完全相同, 主要区别在于: 一、本文不对 $g_{\pm}(t)$ 进行任何的近似; 二、本文用对称的达利兹图区间的事例数之比加强对拟合的约束。本文的方法可应用于 Belle II 实验未来的大统计量 D^* 衰变样本, 也可稍作修改后应用于 Belle II Charm Flavor Tagger 样本。基于这些样本, $D^0-\bar{D}^0$ 混合参数测量精度将显著提高。目前 $D^0-\bar{D}^0$ 混合参数的测量精度和理论计算精度都有待提高, 尚未能判别 $D^0-\bar{D}^0$ 混合中是否存在新物理的贡献。

标准模型中, 纯弱相互作用过程对 $D^0-\bar{D}^0$ 混合的贡献为 QCD 和弱相互作用过程贡献的千分之一。对于后者, 直接从夸克层次计算较为困难。主要的困难来自非微扰 QCD 计算中对 GIM 机制的处理。目前最好的计算结果用实验测量的分支比代替 QCD 部分的计算^[17], 其结果也受到已知分支比的限制。若 QCD 的贡献可以很好地确定, 则可得到精确的 $D^0-\bar{D}^0$ 混合参数计算结果。将其与 Belle II 和 LHCb 未来的高精度测量结果对比, 可得出新物理对 $D^0-\bar{D}^0$ 混合参数的贡献。

除 $D^0-\bar{D}^0$ 混合的理论预测值受到非微扰 QCD 限制外, μ 子磁矩^[167-168]、 $B \rightarrow Kl^+l^-$ ^[169-170] 和 $B \rightarrow K\pi$ ^[171] 衰变分支比等观测量的标准模型预言同样受到非微扰 QCD 的影响^[172]。可见, 对 QCD 的深入理解可推动多个重要课题的研究。目前, QCD 无法解析地求解^[172]。QCD 理论研究的主要途径有两种, 第一是格点 QCD, 即将时空离散化; 二是近似理论, 即在特定近似下解析求解 QCD, 代表性的工作有: DS/BS 方程、光前量子化、AdS/QCD 和全息光前 QCD、算符展开、有效场理论等。实验可通过对介子、重子和多夸克态性质的测量检验这些理论。

在重子的实验研究方面, 本文基于 Belle 实验数据, 用初态辐射方法测量了 Σ^0 和 Σ^+ 的有效电磁形状因子, 结果与 BESIII 和 BaBar 一致, 首次测量了 $\sqrt{s} \in (2.4, 2.5)$ 和 $\sqrt{s} \in (2.5, 2.6)$ GeV 区间的 Σ^+ 有效电磁形状因子。电磁形状因子含有重子结构和动力学信息, 对非微扰 QCD 的研究有重要意义。目前 Σ 有效电磁形状因子的测量误差较大, 用基础的 pQCD 和 VMD 模型即可描述。随着统计量的提升, 实验测量中可能会出现基础理论无法描述的结构。

随着 BESIII、Belle II 和 LHCb 等实验的数据积累, 以及未来 STCF、EicC 和 EIC 等实验的运行, 将有更多更精确的非微扰能区 QCD 物理的测量结果为 QCD

理论研究提供线索。

参 考 文 献

- [1] 关洪. 原子论的历史和现状: 对物质微观构造认识的发展[M]. 北京大学出版社, 2006.
- [2] LINDBERG D. 西方科学的起源 (第二版)[M]. 张卜天, 译. 湖南科学技术出版社, 2013.
- [3] GRIFFITHS D J. INTRODUCTION TO ELEMENTARY PARTICLES[M]. 1987.
- [4] Wikipedia. Standard model of elementary particles[EB/OL]. https://en.wikipedia.org/wiki/File:Standard_Model_of_Elementary_Particles.svg.
- [5] WEINBERG S. Essay: Half a Century of the Standard Model[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(22): 220001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.220001.
- [6] PESKIN M E, SCHROEDER D V. An introduction to quantum field theory[M]. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- [7] GAILLARD M K, GRANNIS P D, SCIULLI F J. The Standard model of particle physics [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 1999, 71: S96-S111. DOI: 10.1103/RevModPhys.71.S96.
- [8] 张子平. 高能对撞物理[M]. 科学出版社.
- [9] SCHWARTZ M D. Quantum Field Theory and the Standard Model[M]. Cambridge University Press, 2014.
- [10] WORKMAN R L, et al. Review of Particle Physics[J]. Prog. Theor. Exp. Phys., 2022, 2022: 083C01.
- [11] 杜东生. CP 不守恒[M]. 北京大学出版社.
- [12] BIGI I I, SANDA A. CP VIOLATION[M]. Cambridge University Press, 2009.
- [13] KABIR P K. The CP Puzzle: Strange Decays of the Neutral Kaon[M]. London and New York: Academic Press, 1968.
- [14] SACHS R. Interference phenomena of neutral k mesons[J/OL]. Annals of Physics, 1963, 22 (2): 239-262. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491663900551>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(63\)90055-1](https://doi.org/10.1016/0003-4916(63)90055-1).
- [15] LENZ A, WILKINSON G. Mixing and CP Violation in the Charm System[J/OL]. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 2021, 71: 59-85. DOI: 10.1146/annurev-nucl-102419-124613.
- [16] LENZ A, PISCOPO M L, VLAHOS C. Renormalization scale setting for D-meson mixing [J/OL]. Phys. Rev. D, 2020, 102(9): 093002. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.093002.
- [17] JIANG H Y, YU F S, QIN Q, et al. D^0 - $\bar{D}^0$ mixing parameter y in the factorization-assisted topological-amplitude approach[J/OL]. Chin. Phys. C, 2018, 42(6): 063101. DOI: 10.1088/1674-1137/42/6/063101.
- [18] Heavy Flavor Averaging Group. Global Fit for D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing[EB/OL]. https://hflav-eos.web.cern.ch/hflav-eos/charm/CKM23/results_mix_cpv.html.

- [19] FALK A F, GROSSMAN Y, LIGETI Z, et al. The D^0 - anti- D^0 mass difference from a dispersion relation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2004, 69: 114021. DOI: 10.1103/PhysRevD.69.114021.
- [20] LI H N, UMEEDA H, XU F, et al. D meson mixing as an inverse problem[J/OL]. Phys. Lett. B, 2020, 810: 135802. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135802.
- [21] CRIVELLIN A, EGUREN J F, VIRTO J. Next-to-leading-order QCD matching for $\Delta F = 2$ processes in scalar leptoquark models[J/OL]. JHEP, 2022, 03: 185. DOI: 10.1007/JHEP03(2022)185.
- [22] AEBISCHER J, BOBETH C, BURAS A J, et al. SMEFT ATLAS of $\Delta F = 2$ transitions[J/OL]. JHEP, 2020, 12: 187. DOI: 10.1007/JHEP12(2020)187.
- [23] ISIDORI G, NIR Y, PEREZ G. Flavor Physics Constraints for Physics Beyond the Standard Model[J/OL]. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 2010, 60: 355. DOI: 10.1146/annurev.nucl.012809.104534.
- [24] GROSSMAN Y, KAGAN A L, NIR Y. New physics and CP violation in singly Cabibbo suppressed D decays[J/OL]. Phys. Rev. D, 2007, 75: 036008. DOI: 10.1103/PhysRevD.75.036008.
- [25] GOLOWICH E, HEWETT J, PAKVASA S, et al. Implications of D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing for New Physics[J/OL]. Phys. Rev. D, 2007, 76: 095009. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.095009.
- [26] PETROV A A. Charm mixing in the Standard Model and beyond[J/OL]. Int. J. Mod. Phys. A, 2006, 21: 5686-5693. DOI: 10.1142/S0217751X06034902.
- [27] ANJOS J C, et al. A Study of D^0 - anti- D^0 Mixing[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1988, 60: 1239. DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.1239.
- [28] AUBERT B, et al. Evidence for D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2007, 98: 211802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.211802.
- [29] STARIC M, et al. Evidence for D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2007, 98: 211803. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.211803.
- [30] Heavy Flavor Averaging Group. Fit results for D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing[EB/OL]. https://hflav-eos.web.cern.ch/hflav-eos/charm/Beijing07/results_mix_cpv.html.
- [31] Heavy Flavor Averaging Group. Global Fit for D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing[EB/OL]. https://hflav-eos.web.cern.ch/hflav-eos/charm/EPS09/results_mix_cpv.html.
- [32] AAIJ R, et al. Observation of D^0 - $\bar{D}^0$ oscillations[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2013, 110(10): 101802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.101802.
- [33] KO B R, et al. Observation of D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing in e^+e^- Collisions[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2014, 112(11): 111801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.111801.
- [34] AALTONEN T A, et al. Observation of D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing Using the CDF II Detector[J/OL].

- Phys. Rev. Lett., 2013, 111(23): 231802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.231802.
- [35] AAIJ R, et al. Observation of the Mass Difference Between Neutral Charm-Meson Eigenstates[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 127(11): 111801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.111801.
- [36] ASNER D M, et al. Search for D^0 - $\bar{D}^0$ mixing in the Dalitz plot analysis of $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ [J/OL]. Phys. Rev. D, 2005, 72: 012001. DOI: 10.1103/PhysRevD.72.012001.
- [37] MURAMATSU H, et al. Dalitz analysis of $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2002, 89: 251802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.251802.
- [38] ABE K, et al. Measurement of $D^0 - \bar{D}^0$ Mixing Parameters in $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ decays[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2007, 99: 131803. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.131803.
- [39] DEL AMO SANCHEZ P, et al. Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing parameters using $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ and $D^0 \rightarrow K_S^0 K^+ K^-$ decays[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2010, 105: 081803. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.081803.
- [40] PENG T, et al. Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing and search for indirect CP violation using $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ decays[J/OL]. Phys. Rev., 2014, D89(9): 091103. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.091103.
- [41] AAIJ R, et al. Model-independent measurement of mixing parameters in $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ decays[J/OL]. JHEP, 2016, 04: 033. DOI: 10.1007/JHEP04(2016)033.
- [42] AAIJ R, et al. Measurement of the mass difference between neutral charm-meson eigenstates [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 122(23): 231802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.231802.
- [43] AAIJ R, et al. Observation of the Mass Difference Between Neutral Charm-Meson Eigenstates[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 127(11): 111801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.111801.
- [44] AAIJ R, et al. Model-independent measurement of charm mixing parameters in $B^- \rightarrow D^0 (\rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-) \mu^- \bar{\nu}_\mu X$ decays[J/OL]. Phys. Rev. D, 2023, 108(5): 052005. DOI: 10.1103/PhysRevD.108.052005.
- [45] National Laboratory for High Energy Physics. KEKB B-Factory Design Report[M]. 1995.
- [46] BEVAN A J, et al. The Physics of the B Factories[J/OL]. Eur. Phys. J. C, 2014, 74: 3026. DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-3026-9.
- [47] Belle Collaboration. Generic Slides[EB/OL]. https://belle.kek.jp/belle/slides/slide_index.html.
- [48] ABASHIAN A, et al. The Belle Detector[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2002, 479: 117-232. DOI: 10.1016/S0168-9002(01)02013-7.
- [49] BRODZICKA J, et al. Physics Achievements from the Belle Experiment[J/OL]. PTEP, 2012, 2012: 04D001. DOI: 10.1093/ptep/pts072.

- [50] 汪晓莲, 李澄, 邵明, 等. 粒子探测技术[M]. 中国科学技术大学出版社, 2009.
- [51] TAKAHIRO HOJO M H. Level 3 trigger at belle[EB/OL]. https://belle.kek.jp/secured/softfig/level3_20020212.ps.gz.
- [52] K. HANAGAKI H K, M. Hazumi. [J]. BELLE note #299.
- [53] BEVAN A J, et al. The Physics of the B Factories[J/OL]. Eur. Phys. J. C, 2014, 74: 3026. DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-3026-9.
- [54] Belle analysis framework user's manual[EB/OL]. <https://belle.kek.jp/group/software/basf/html/basf.html>.
- [55] AKAI K, FURUKAWA K, KOISO H. SuperKEKB Collider[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2018, 907: 188-199. DOI: 10.1016/j.nima.2018.08.017.
- [56] ZHOU D, OHMI K, FUNAKOSHI Y, et al. Luminosity performance of SuperKEKB[A]. 2023. arXiv: 2306.02692.
- [57] DE MARINO G. D^0 Lifetime Measurement with Belle II Early Data[D]. Pisa U., 2019.
- [58] OIDE K, et al. Design of beam optics for the Future Circular Collider e^+e^- -collider rings [J/OL]. Phys. Rev. Accel. Beams, 2016, 19(11): 111005. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.19.111005.
- [59] ABE T, et al. Belle II Technical Design Report[A]. 2010. arXiv: 1011.0352.
- [60] FUNAKOSHI Y, FURUKAWA K, SuperKEKB Commissioning Group, et al. SuperKEKB Design Report[EB/OL]. <https://www-linac.kek.jp/linac-com/report/skb-tdr/>.
- [61] SuperKEKB Task Force, KEK. Letter of Intent for KEK Super B Factory[EB/OL]. https://superb.kek.jp/documents/loi/img/LoI_accelerator.pdf.
- [62] Belle II Collaboration. Superkekb[EB/OL]. <https://www.belle2.org/research/superkekb/>.
- [63] Belle II Collaboration. Belle II Luminosity[EB/OL]. <https://confluence.desy.de/display/BI/Belle+II+Luminosity>.
- [64] ALTMANNSHOFER W, et al. The Belle II Physics Book[J/OL]. PTEP, 2019, 2019(12): 123C01. DOI: 10.1093/ptep/ptz106.
- [65] ADACHI I, et al. sBelle Design Study Report[A]. 2008. arXiv: 0810.4084.
- [66] Belle II Collaboration. Belle II Detector[EB/OL]. <https://www.belle2.org/e21595/e21770/info/boxContent25431/belle2.pdf>.
- [67] YE H, et al. Commissioning and performance of the Belle II pixel detector[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2021, 987: 164875. DOI: 10.1016/j.nima.2020.164875.
- [68] ABUDINÉN F, et al. Precise measurement of the D^0 and D^+ lifetimes at Belle II[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 127(21): 211801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.211801.
- [69] Belle II Collaboration. PXD Talks and Publications[EB/OL]. <https://confluence.desy.de/display/BI/PXD+Talks+and+Publications>, <https://confluence.desy.de/download/attachments/>

- 196223963/PXD-Publications.pdf.
- [70] IRMLER C, et al. The Silicon Vertex Detector of the Belle II experiment[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2023, 1045: 167578. DOI: 10.1016/j.nima.2022.167578.
- [71] UEMATSU Y, et al. The Silicon Vertex Detector of the Belle II experiment[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2022, 1033: 166688. DOI: 10.1016/j.nima.2022.166688.
- [72] ADAMCZYK K, et al. The design, construction, operation and performance of the Belle II silicon vertex detector[J/OL]. JINST, 2022, 17(11): P11042. DOI: 10.1088/1748-0221/17/11/P11042.
- [73] TANIGUCHI N. Central Drift Chamber for Belle-II[J/OL]. JINST, 2017, 12(06): C06014. DOI: 10.1088/1748-0221/12/06/C06014.
- [74] R. GARG M U N T, K. Trabelsi. BELLE2-NOTE-PH-2020-059[Z].
- [75] STARIC M. The TOP counter and determination of bunch-crossing time at Belle II[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2023, 1055: 168474. DOI: 10.1016/j.nima.2023.168474.
- [76] ADAM I, et al. The DIRC particle identification system for the BaBar experiment[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2005, 538: 281-357. DOI: 10.1016/j.nima.2004.08.129.
- [77] SANDILYA S, SCHWARTZ A, TAMPONI U. Charged particle identification performance of the TOP counters in Belle II[J/OL]. J. Phys. Conf. Ser., 2022, 2374(1): 012107. DOI: 10.1088/1742-6596/2374/1/012107.
- [78] BESSNER M. Performance of the Belle II imaging Time-Of-Propagation (iTOP) detector in first collisions[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2020, 958: 162318. DOI: 10.1016/j.nima.2019.06.059.
- [79] GAZ A. Calibration and commissioning of the Time Of Propagation PID detector at the Belle II Experiment[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2019, 936: 511-514. DOI: 10.1016/j.nima.2018.11.028.
- [80] TAMPONI U. The TOP counter of Belle II: status and first results[A/OL]. 2018. arXiv: 1811.04532.
- [81] IWATA S. Development of the Aerogel RICH counter for a super B-factory experiment[D]. Tokyo Metropolitan University, 2016.
- [82] YONENAGA M. Particle Identification using the Aerogel RICH Counter at the Belle II Experiment[D]. Tokyo Metropolitan University, 2020.
- [83] LAI Y T, et al. Performance of the Belle II aerogel-based ring-imaging Cherenkov counter system in SuperKEKB 2019 phase 3 operation[J/OL]. JINST, 2020, 15(07): C07039. DOI: 10.1088/1748-0221/15/07/C07039.
- [84] RICHMAN-TAYLOR P, VAN TONDER R, FODOR A, et al. BELLE2-NOTE-PH-2021-041, Version 3.0[Z].

- [85] SAGAWA H. The BELLE CsI calorimeter[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2000, 453: 259-261. DOI: 10.1016/S0168-9002(00)00643-4.
- [86] KUZMIN A. Electromagnetic calorimeter of Belle II[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2020, 958: 162235. DOI: 10.1016/j.nima.2019.05.076.
- [87] LONGO S, et al. CsI(Tl) pulse shape discrimination with the Belle II electromagnetic calorimeter as a novel method to improve particle identification at electron-positron colliders[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2020, 982: 164562. DOI: 10.1016/j.nima.2020.164562.
- [88] LI C. The data acquisition and trigger system of the Belle II experiment[J/OL]. PoS, 2015, EPS-HEP2015: 258. DOI: 10.22323/1.234.0258.
- [89] KOGA T, NAKAZAWA H. BELLE2-NOTE-TE-2022-011, Version 1.0[Z].
- [90] UNGER K L, BÄHR S, BECKER J, et al. Operation of the Neural z-Vertex Track Trigger for Belle II in 2021 - a Hardware Perspective[J/OL]. J. Phys. Conf. Ser., 2023, 2438(1): 012056. DOI: 10.1088/1742-6596/2438/1/012056.
- [91] HLT Skims[EB/OL]. <https://confluence.desy.de/display/BI/HLT+Skims>.
- [92] KIM C H, et al. Trigger slow control system of the Belle II experiment[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2021, 1014: 165748. DOI: 10.1016/j.nima.2021.165748.
- [93] LAI Y T, et al. Commissioning and Operation of the Upgraded Belle II DAQ System With PCI-Express-Based High-Speed Readout[J/OL]. IEEE Trans. Nucl. Sci., 2023, 70(6): 890-897. DOI: 10.1109/TNS.2022.3228288.
- [94] LEVIT D, et al. Trigger Timing Interface for the Read-Out Upgrade of the Belle II DAQ[J/OL]. IEEE Trans. Nucl. Sci., 2023, 70(6): 941-948. DOI: 10.1109/TNS.2023.3240161.
- [95] ZHOU Q D, et al. PCI-Express Based High-Speed Readout for the Belle II DAQ Upgrade[J/OL]. IEEE Trans. Nucl. Sci., 2021, 68(8): 1818-1825. DOI: 10.1109/TNS.2021.3086526.
- [96] KUHR T, PULVERMACHER C, RITTER M, et al. The Belle II Core Software[J/OL]. Comput. Softw. Big Sci., 2019, 3(1): 1. DOI: 10.1007/s41781-018-0017-9.
- [97] GELB M, et al. B2BII: Data Conversion from Belle to Belle II[J/OL]. Comput. Softw. Big Sci., 2018, 2(1): 9. DOI: 10.1007/s41781-018-0016-x.
- [98] BRUN R, BRUYANT F, MAIRE M, et al. GEANT3[Z]. 1987.
- [99] AGOSTINELLI S, et al. GEANT4—a simulation toolkit[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2003, 506: 250-303. DOI: 10.1016/S0168-9002(03)01368-8.
- [100] KROHN J F, et al. Global Decay Chain Vertex Fitting at B-Factories[A]. 2019. arXiv: 1901.11198.
- [101] BILKA T, CASAROSA G, CANTO A D, et al. BELLE2-NOTE-PH-2021-017[Z].
- [102] KAKUNO H. Measurement of $|V(ub)|$ through charmless semileptonic B-meson decay[D]. 2003.

- [103] BHARDWAJ V, et al. Inclusive and exclusive measurements of B decays to χ_{c1} and χ_{c2} at Belle[J/OL]. Phys. Rev. D, 2016, 93(5): 052016. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.052016.
- [104] GULER H, et al. Study of the $K^+\pi^+\pi^-$ Final State in $B^+ \rightarrow J/\psi K^+\pi^+\pi^-$ and $B^+ \rightarrow \psi - \text{prime} K^+\pi^+\pi^-$ [J/OL]. Phys. Rev. D, 2011, 83: 032005. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.032005.
- [105] DI CANTO A, TICÓ J G, GERSHON T, et al. Novel method for measuring charm-mixing parameters using multibody decays[J/OL]. Phys. Rev., 2019, D99: 012007. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.012007.
- [106] ABLIKIM M, et al. Determination of Strong-Phase Parameters in $D \rightarrow K_{S,L}^0 \pi^+ \pi^-$ [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124(24): 241802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.241802.
- [107] ABLIKIM M, et al. Model-independent determination of the relative strong-phase difference between D^0 and $\bar{D}^0 \rightarrow K_{S,L}^0 \pi^+ \pi^-$ and its impact on the measurement of the CKM angle γ/ϕ_3 [J/OL]. Phys. Rev. D, 2020, 101(11): 112002. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.112002.
- [108] BONDAR A, POLUEKTOV A, VOROBIEV V. Charm mixing in a model-independent analysis of correlated $D^0 \bar{D}^0$ decays[J/OL]. Phys. Rev., 2010, D82: 034033. DOI: 10.1103/PhysRevD.82.034033.
- [109] THOMAS C, WILKINSON G. Model-independent $D^0 - \bar{D}^0$ mixing and CP violation studies with $D^0 \rightarrow K_s^0 \pi^+ \pi^-$ and $D^0 \rightarrow K_s^0 K^+ K^-$ [J/OL]. JHEP, 2012, 10: 185. DOI: 10.1007/JHEP10(2012)185.
- [110] KARBACH T M, RAVEN G, SCHILLER M. Decay time integrals in neutral meson mixing and their efficient evaluation[A]. 2014. arXiv: 1407.0748.
- [111] SATO Y, CUNLIFFE S, MEIER F, et al. Monte Carlo matching in the Belle II software [J/OL]. EPJ Web Conf., 2021, 251: 03021. DOI: 10.1051/epjconf/202125103021.
- [112] LIBBY J, et al. New determination of the $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ and $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+ \pi^-$ coherence factors and average strong-phase differences[J/OL]. Phys. Lett. B, 2014, 731: 197-203. DOI: 10.1016/j.physletb.2014.02.032.
- [113] ADACHI I, et al. Novel method for the identification of the production flavor of neutral charmed mesons[J/OL]. Phys. Rev. D, 2023, 107(11): 112010. DOI: 10.1103/PhysRevD.107.112010.
- [114] HOFSTADTER R. Electron scattering and nuclear structure[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 1956, 28: 214-254. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.28.214>.
- [115] PACETTI S, BALDINI FERROLI R, TOMASI-GUSTAFSSON E. Proton electromagnetic form factors: Basic notions, present achievements and future perspectives[J/OL]. Phys. Rept., 2015, 550-551: 1-103. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.09.005.
- [116] HAND L N, MILLER D G, WILSON R. Electric and magnetic formfactor of the nucleon [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 1963, 35: 335. DOI: 10.1103/RevModPhys.35.335.

- [117] BARNES K. Choice of electromagnetic form factors[J/OL]. Physics Letters, 1962, 1(5): 166-168. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916362903384>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0031-9163\(62\)90338-4](https://doi.org/10.1016/0031-9163(62)90338-4).
- [118] HOFSTADTER R, BUMILLER F, YEARIAN M R. Electromagnetic structure of the proton and neutron[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 1958, 30: 482-497. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.30.482>.
- [119] HOFSTADTER R. Electron scattering and nuclear structure[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 1956, 28: 214-254. DOI: 10.1103/RevModPhys.28.214.
- [120] MCALLISTER R W, HOFSTADTER R. Elastic scattering of 188-MeV electrons from the proton and the α particle[J/OL]. Phys. Rev., 1956, 102: 851-856. DOI: 10.1103/PhysRev.102.851.
- [121] PERDRISAT C F, PUNJABI V, VANDERHAEGHEN M. Nucleon Electromagnetic Form Factors[J/OL]. Prog. Part. Nucl. Phys., 2007, 59: 694-764. DOI: 10.1016/j.ppnp.2007.05.01.
- [122] WEINBERG S. The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations[M/OL]. Cambridge University Press, 2005. DOI: 10.1017/CBO9781139644167.
- [123] ROSENBLUTH M N. High Energy Elastic Scattering of Electrons on Protons[J/OL]. Phys. Rev., 1950, 79: 615-619. DOI: 10.1103/PhysRev.79.615.
- [124] SCHWINGER J S. Particles, sources, and fields. vol. 2[M]. 1989.
- [125] ARBUZOV A B, KOPYLOVA T V. On relativization of the Sommerfeld-Gamow-Sakharov factor[J/OL]. JHEP, 2012, 04: 009. DOI: 10.1007/JHEP04(2012)009.
- [126] DENIG A, SALME G. Nucleon electromagnetic form factors in the timelike region[J/OL]. Prog. Part. Nucl. Phys., 2013, 68: 113-157. DOI: 10.1016/j.ppnp.2012.09.005.
- [127] AUBERT B, et al. A Study of $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ using initial state radiation with BABAR[J/OL]. Phys. Rev. D, 2006, 73: 012005. DOI: 10.1103/PhysRevD.73.012005.
- [128] AUBERT B, et al. Study of $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}, \Lambda\bar{\Sigma}^0, \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ using initial state radiation with BABAR[J/OL]. Phys. Rev. D, 2007, 76: 092006. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.092006.
- [129] BOMBACI I. The Hyperon Puzzle in Neutron Stars[J/OL]. JPS Conf. Proc., 2017, 17: 101002. DOI: 10.7566/JPSCP.17.101002.
- [130] DAI J P, CAO X, LENSKE H. Data driven isospin analysis of timelike octet baryons electromagnetic form factors and charmonium decay into baryon-anti-baryon[A]. 2023. arXiv: 2304.04913.
- [131] GOUGH ESCHRICH I M, et al. Measurement of the Sigma- Charge Radius by Sigma-Electron Elastic Scattering[J/OL]. Phys. Lett. B, 2001, 522: 233-239. DOI: 10.1016/S0370-2693(01)01285-0.

- [132] BISELLO D, et al. Baryon pair production in e^+e^- annihilation at $\sqrt{s} = 2.4 - GeV$ [J/OL]. Z. Phys. C, 1990, 48: 23-28. DOI: 10.1007/BF01565602.
- [133] ABLIKIM M, et al. Observation of a cross-section enhancement near mass threshold in $e^+e^- \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda}$ [J/OL]. Phys. Rev. D, 2018, 97(3): 032013. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.032013.
- [134] ABLIKIM M, et al. Complete Measurement of the Λ Electromagnetic Form Factors[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123(12): 122003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.122003.
- [135] ABLIKIM M, et al. Measurements of Σ^+ and Σ^- time-like electromagnetic form factors for center-of-mass energies from 2.3864 to 3.0200 GeV[J/OL]. Phys. Lett. B, 2021, 814: 136110. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136110.
- [136] ABLIKIM M, et al. Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ cross sections at center-of-mass energies from 2.3864 to 3.0200 GeV[J/OL]. Phys. Lett. B, 2022, 831: 137187. DOI: 10.1016/j.physletb.2022.137187.
- [137] ABLIKIM M, et al. Measurement of cross section for $e^+e^- \rightarrow \Xi^- \bar{\Xi}^+$ near threshold at BESIII [J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 103(1): 012005. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.012005.
- [138] ABLIKIM M, et al. Measurement of cross section for $e^+e^- \rightarrow \Xi^0 \bar{\Xi}^0$ near threshold[J/OL]. Phys. Lett. B, 2021, 820: 136557. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136557.
- [139] ABLIKIM M, et al. Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda}$ cross section from threshold to 3.00 GeV using events with initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2023, 107(7): 072005. DOI: 10.1103/PhysRevD.107.072005.
- [140] YANG Y, CHEN D Y, LU Z. Electromagnetic form factors of Λ hyperon in the vector meson dominance model[J/OL]. Phys. Rev. D, 2019, 100(7): 073007. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.073007.
- [141] LI Z Y, DAI A X, XIE J J. Electromagnetic Form Factors of Λ Hyperon in the Vector Meson Dominance Model and a Possible Explanation of the Near-Threshold Enhancement of the Reaction[J/OL]. Chin. Phys. Lett., 2022, 39(1): 011201. DOI: 10.1088/0256-307X/39/1/011201.
- [142] HAIDENBAUER J, MEIßNER U G, DAI L Y. Hyperon electromagnetic form factors in the timelike region[J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 103(1): 014028. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.014028.
- [143] HAIDENBAUER J, MEIßNER U G. The electromagnetic form factors of the Λ in the time-like region[J/OL]. Phys. Lett. B, 2016, 761: 456-461. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.08.067.
- [144] XIAO L Y, WENG X Z, ZHONG X H, et al. A possible explanation of the threshold enhancement in the process $e^+e^- \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda}$ [J/OL]. Chin. Phys. C, 2019, 43(11): 113105. DOI: 10.1088/1674-1137/43/11/113105.
- [145] YAN B, CHEN C, XIE J J. Σ and Ξ electromagnetic form factors in the extended vector

- meson dominance model[J/OL]. Phys. Rev. D, 2023, 107(7): 076008. DOI: 10.1103/PhysRevD.107.076008.
- [146] HUANG G, YAN W, ZHOU X. R measurement and QCD studies at future super $\tau - c$ factory [A]. 2022. arXiv: 2203.06961.
- [147] BALDINI R, PACETTI S, ZALLO A, et al. Unexpected features of $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ and $e^+e^- \rightarrow \lambda\bar{\lambda}$ cross sections near threshold[J/OL]. Eur. Phys. J. A, 2009, 39: 315-321. DOI: 10.1140/epja/i2008-10716-1.
- [148] NICROSINI O, TRENTADUE L. Soft Photons and Second Order Radiative Corrections to $e^+e^- \rightarrow Z^0$ [J/OL]. Phys. Lett. B, 1987, 196: 551. DOI: 10.1016/0370-2693(87)90819-7.
- [149] BERENDS F A, VAN NEERVEN W L, BURGERS G J H. Higher Order Radiative Corrections at LEP Energies[J/OL]. Nucl. Phys. B, 1988, 297: 429. DOI: 10.1016/0550-3213(88)90313-6.
- [150] BENAYOUN M, EIDELMAN S I, IVANCHENKO V N, et al. Spectroscopy at B factories using hard photon emission[J/OL]. Mod. Phys. Lett. A, 1999, 14: 2605-2614. DOI: 10.1142/S021773239900273X.
- [151] BRAMBILLA N, et al. Heavy quarkonium physics[A/OL]. 2004. arXiv: hep-ph/0412158.
- [152] PING R G. An exclusive event generator for e^+e^- scan experiments[J/OL]. Chin. Phys. C, 2014, 38: 083001. DOI: 10.1088/1674-1137/38/8/083001.
- [153] CZYŻ H, KISZA P, TRACZ S. Monte Carlo generators for hadron physics: updates on PHOKHARA and EKHARA generators[J/OL]. EPJ Web Conf., 2017, 142: 01010. DOI: 10.1051/epjconf/201714201010.
- [154] LANGE D J. The EvtGen particle decay simulation package[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2001, 462: 152-155. DOI: 10.1016/S0168-9002(01)00089-4.
- [155] [Z].
- [156] ROLKE W A, LOPEZ A M, CONRAD J. Limits and confidence intervals in the presence of nuisance parameters[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2005, 551: 493-503. DOI: 10.1016/j.nima.2005.05.068.
- [157] ABLIKIM M, et al. Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ cross sections at center-of-mass energies from 2.3864 to 3.0200 GeV[A]. 2021. arXiv: 2110.04510.
- [158] DUNGEL W. [J]. BELLE note #1176.
- [159] KOPPENBURG P. [J]. BELLE note #621.
- [160] KATO Y, et al. Studies of charmed strange baryons in the ΛD final state at Belle[J/OL]. Phys. Rev. D, 2016, 94(3): 032002. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.032002.
- [161] RODRIGO G, CZYZ H, KUHN J H, et al. Radiative return at NLO and the measurement of the hadronic cross-section in electron positron annihilation[J/OL]. Eur. Phys. J. C, 2002, 24:

- 71-82. DOI: 10.1007/s100520200912.
- [162] ABLIKIM M, et al. Study of J/ψ and $\psi(3686)$ decay to $\Lambda\bar{\Lambda}$ and $\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ final states[J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 95(5): 052003. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.052003.
- [163] FELDMAN G J, COUSINS R D. A Unified approach to the classical statistical analysis of small signals[J/OL]. Phys. Rev. D, 1998, 57: 3873-3889. DOI: 10.1103/PhysRevD.57.3873.
- [164] RYU S, et al. Measurements of Branching Fractions of τ Lepton Decays with one or more K_S^0 [J/OL]. Phys. Rev. D, 2014, 89(7): 072009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.072009.
- [165] ABLIKIM M, et al. Σ^+ and $\bar{\Sigma}^-$ polarization in the J/ψ and $\psi(3686)$ decays[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 125(5): 052004. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.052004.
- [166] ACHASOV M, et al. STCF conceptual design report (Volume 1): Physics & detector[J/OL]. Front. Phys. (Beijing), 2024, 19(1): 14701. DOI: 10.1007/s11467-023-1333-z.
- [167] AGUILLARD D P, et al. Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2023, 131(16): 161802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.131.161802.
- [168] AOYAMA T, et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model [J/OL]. Phys. Rept., 2020, 887: 1-166. DOI: 10.1016/j.physrep.2020.07.006.
- [169] ALGUERÓ M, BISWAS A, CAPDEVILA B, et al. To (b)e or not to (b)e: no electrons at LHCb[J/OL]. Eur. Phys. J. C, 2023, 83(7): 648. DOI: 10.1140/epjc/s10052-023-11824-0.
- [170] CIUCHINI M, FEDELE M, FRANCO E, et al. Constraints on lepton universality violation from rare B decays[J/OL]. Phys. Rev. D, 2023, 107(5): 055036. DOI: 10.1103/PhysRevD.107.055036.
- [171] LIN S W, et al. Difference in direct charge-parity violation between charged and neutral B meson decays[J/OL]. Nature, 2008, 452: 332-335. DOI: 10.1038/nature06827.
- [172] GROSS F, et al. 50 Years of Quantum Chromodynamics[J/OL]. Eur. Phys. J. C, 2023, 83: 1125. DOI: 10.1140/epjc/s10052-023-11949-2.
- [173] DALITZ R H. On the analysis of τ -meson data and the nature of the τ -meson[J/OL]. Phil. Mag. Ser.7, 1953, 44: 1068-1080. DOI: 10.1080/14786441008520365.
- [174] WORKMAN R L, et al. Review of Particle Physics[J]. Prog. Theor. Exp. Phys., 2022, 2022: 083C01.
- [175] TICO J G. cfit[EB/OL]. <https://github.com/cfit/cfit>.
- [176] BACK J, et al. LAURA⁺⁺: A Dalitz plot fitter[J/OL]. Comput. Phys. Commun., 2018, 231: 198-242. DOI: 10.1016/j.cpc.2018.04.017.
- [177] SCHREINER H, HASSE C, HITTLE B, et al. Goofit/goofit: Version 2.3.0[CP/OL]. Zenodo, 2022. <https://doi.org/10.5281/zenodo.6572782>.
- [178] ALVES JUNIOR A A. Multithreadcorner/hydra[EB/OL]. 2018. <https://doi.org/10.5281/ze>

- nodo.1206261.
- [179] ALVES A A, SOKOLOFF M D. Hydra: a C++11 framework for data analysis in massively parallel platforms[J/OL]. J. Phys. Conf. Ser., 2018, 1085(4): 042013. DOI: 10.1088/1742-6596/1085/4/042013.
- [180] DALitz-plot Fitter aNd Event generator[EB/OL]. <https://github.com/adicanto/dafne>.
- [181] Thrust[EB/OL]. <https://thrust.github.io/>.
- [182] OpenMP[EB/OL]. <https://www.openmp.org/>.
- [183] oneTBB[EB/OL]. <https://github.com/oneapi-src/oneTBB>.
- [184] ROBISON A D. Intel® threading building blocks (tbb)[M/OL]. Boston, MA: Springer US, 2011: 955-964. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09766-4_51.
- [185] CUDA[EB/OL]. <https://developer.nvidia.com/cuda-toolkit>.
- [186] TICO J G. Measurement of the neutral d meson mixing parameters at the babar experiment [M]. 2011.
- [187] STERNHEIMER R M, LINDENBAUM S J. Extension of the Isobaric Nucleon Model for Pion Production in Pion-Nucleon, Nucleon-Nucleon, and Antinucleon-Nucleon Interactions [J/OL]. Phys. Rev., 1961, 123: 333-376. DOI: 10.1103/PhysRev.123.333.
- [188] HERNDON D, SODING P, CASHMORE R J. A GENERALIZED ISOBAR MODEL FOR-
MALISM[J/OL]. Phys. Rev. D, 1975, 11: 3165. DOI: 10.1103/PhysRevD.11.3165.
- [189] KOPP S, et al. Dalitz analysis of the decay $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ [J/OL]. Phys. Rev. D, 2001, 63: 092001. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.092001.
- [190] DEL AMO SANCHEZ P, et al. Measurement of $D^0-\bar{D}^0$ mixing parameters using $D^0 \rightarrow K_s^0 \pi^+ \pi^-$ and $D^0 \rightarrow K_s^0 K^+ K^-$ decays[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2010, 105: 081803. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.081803.
- [191] ABLIKIM M, et al. Determination of Strong-Phase Parameters in $D \rightarrow K_{S,L}^0 \pi^+ \pi^-$ [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124(24): 241802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.241802.
- [192] ABLIKIM M, et al. Model-independent determination of the relative strong-phase difference between D^0 and $\bar{D}^0 \rightarrow K_{S,L}^0 \pi^+ \pi^-$ and its impact on the measurement of the CKM angle γ/ϕ_3 [J/OL]. Phys. Rev. D, 2020, 101(11): 112002. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.112002.
- [193] Conference readiness[EB/OL]. <https://confluence.desy.de/pages/viewpage.action?spaceKey=BI&title=Conference+readiness>.
- [194] UEHARA S, et al. Measurement of $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ transition form factor at Belle[J/OL]. Phys. Rev. D, 2012, 86: 092007. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.092007.
- [195] NISHIDA S. [J]. BELLE note #548.
- [196] CHEON B G, et al. Electromagnetic calorimeter trigger at Belle[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2002, 494: 548-554. DOI: 10.1016/S0168-9002(02)01547-4.

- [197] KICHIMI H, et al. The BELLE TOF system[J/OL]. Nucl. Instrum. Meth. A, 2000, 453: 315-320. DOI: 10.1016/S0168-9002(00)00651-3.
- [198] KUO C C. [J]. BELLE note #545.
- [199] CHEN-CHENG K, WAN-TING C, AUGUSTINE E, et al. [J]. BELLE note #691.
- [200] AID S, ANDREEV V, ANDRIEU B, et al. A measurement and QCD analysis of the proton structure function $F_2(x, Q^2)$ at HERA[J/OL]. Nuclear Physics B, 1996, 470(1): 3-38. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321396002118>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(96\)00211-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00211-8).
- [201] KRASNY M W, PLACZEK W, SPIESBERGER H. Determination of the longitudinal structure function at hera from radiative events[J/OL]. Zeitschrift für Physik C Particles and Fields, 1992, 53(4): 687-693. <https://doi.org/10.1007/BF01559748>.
- [202] ARBUZOV A B, KURAEV E A, MERENKOV N P, et al. Hadronic cross sections in electron-positron annihilation with tagged photon[J/OL]. Journal of High Energy Physics, 1999, 1998(12): 009. <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/1998/12/009>.
- [203] DRUZHININ V P, EIDELMAN S I, SEREDNYAKOV S I, et al. Hadron production via e^+e^- collisions with initial state radiation[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2011, 83: 1545-1588. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.83.1545>.
- [204] LEES J P, et al. Measurement of the $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ cross section in the energy range from 3.0 to 6.5 GeV[J/OL]. Phys. Rev. D, 2013, 88(7): 072009. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.072009.
- [205] YUAN C Z, et al. Measurement of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ cross-section via initial state radiation at Belle[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2007, 99: 182004. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.182004.
- [206] WANG X L, HAN Y L, YUAN C Z, et al. Observation of $\psi(4040)$ and $\psi(4160)$ decay into $\eta J/\psi$ [J/OL]. Phys. Rev. D, 2013, 87(5): 051101. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.051101.
- [207] HAN Y L, et al. Measurement of $e^+e^- \rightarrow \gamma \chi_{cJ}$ via initial state radiation at Belle[J/OL]. Phys. Rev. D, 2015, 92(1): 012011. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.012011.
- [208] LIU Z Q, et al. Study of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ and Observation of a charged Charmonium-like state at Belle[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2013, 110: 252002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.252002.
- [209] LEES J P, et al. Dalitz plot analyses of $J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$, $J/\psi \rightarrow K^+K^-\pi^0$, and $J/\psi \rightarrow K_S^0 K^\pm \pi^\mp$ produced via e^+e^- annihilation with initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 95(7): 072007. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.072007.
- [210] SHEN C P, et al. Observation of the $\phi(1680)$ and the $Y(2175)$ in $e^+e^- \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$ [J/OL]. Phys. Rev. D, 2009, 80: 031101. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.031101.
- [211] PAKHLOVA G, et al. Measurement of the near-threshold $e^+e^- \rightarrow D\bar{D}$ cross section using initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2008, 77: 011103. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.

- 011103.
- [212] PAKHLOVA G, et al. Measurement of the $e^+e^- \rightarrow D^0 D^{*-} \pi^+$ cross section using initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2009, 80: 091101. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.091101.
- [213] PAKHLOVA G, et al. Measurement of $e^+e^- \rightarrow D_s^{(*)+} D_s^{(*)-}$ cross sections near threshold using initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2011, 83: 011101. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.011101.
- [214] WANG X L, et al. Measurement of $e^+e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \psi(2S)$ via Initial State Radiation at Belle [J/OL]. Phys. Rev. D, 2015, 91: 112007. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.112007.
- [215] JIA S, et al. Observation of a vector charmoniumlike state in $e^+e^- \rightarrow D_s^+ D_{s1}(2536)^- + c.c.$ [J/OL]. Phys. Rev. D, 2019, 100(11): 111103. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.111103.
- [216] JIA S, et al. Evidence for a vector charmoniumlike state in $e^+e^- \rightarrow D_s^+ D_{s2}^*(2573)^- + c.c.$ [J/OL]. Phys. Rev. D, 2020, 101(9): 091101. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.091101.
- [217] ZHUKOVA V, et al. Angular analysis of the $e^+e^- \rightarrow D^{(*)\pm} D^{*\mp}$ process near the open charm threshold using initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2018, 97(1): 012002. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.012002.
- [218] PAKHLOVA G, et al. Observation of a near-threshold enhancement in the $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c^+ \Lambda_c^-$ cross section using initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2008, 101: 172001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.172001.
- [219] AUBERT B, et al. The $e^+e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-$, $K^+ K^- \pi^+ \pi^-$, and $K^+ K^- K^+ K^-$ cross sections at center-of-mass energies 0.5-GeV - 4.5-GeV measured with initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2005, 71: 052001. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.052001.
- [220] AUBERT B, et al. The $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+ \pi^-)$, $2(\pi^+ \pi^- \pi^0)$ and $K^+ K^- 2(\pi^+ \pi^-)$ cross sections at center-of-mass energies from production threshold to 4.5-GeV measured with initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2006, 73: 052003. DOI: 10.1103/PhysRevD.73.052003.
- [221] AUBERT B, et al. Measurements of $e^+e^- \rightarrow K^+ K^- \eta$, $K^+ K^- \pi^0$ and $K_s^0 K^\pm \pi^\mp$ cross- sections using initial state radiation events[J/OL]. Phys. Rev. D, 2008, 77: 092002. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.092002.
- [222] LEES J P, et al. Measurement of the $e^+e^- \rightarrow K_s^0 K^\pm \pi^\mp \pi^0$ and $K_s^0 K^\pm \pi^\mp \eta$ cross sections using initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 95(9): 092005. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.092005.
- [223] LEES J P, et al. Study of $e^+e^- \rightarrow p \bar{p}$ via initial-state radiation at BABAR[J/OL]. Phys. Rev. D, 2013, 87(9): 092005. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.092005.
- [224] LEES J P, et al. Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \pi^0$ cross section using initial-state radiation at BABAR[J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 96(9): 092009. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.092009.

- [225] AUBERT B, et al. The $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$, $K^+K^-\pi^0\pi^0$ and $K^+K^-K^+K^-$ cross-sections measured with initial-state radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2007, 76: 012008. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.012008.
- [226] AUBERT B, et al. Precise measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-(\gamma)$ cross section with the Initial State Radiation method at BABAR[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2009, 103: 231801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.231801.
- [227] LEES J P, et al. Precise Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-(\gamma)$ Cross Section with the Initial-State Radiation Method at BABAR[J/OL]. Phys. Rev. D, 2012, 86: 032013. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.032013.
- [228] AUBERT B, et al. Study of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ process using initial state radiation with BaBar [J/OL]. Phys. Rev. D, 2004, 70: 072004. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.072004.
- [229] LEES J P, et al. Study of the process $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ using initial state radiation with BABAR [J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 104(11): 112003. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.112003.
- [230] AUBERT B, et al. Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing from a time-dependent amplitude analysis of $D^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$ decays[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2009, 103: 211801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.211801.

附录 A DAFNE 含时达利兹图分析框架

A.1 研究动机

达利兹图 (Dalitz-plot) 是一种用两个运动学变量描述三体衰变的方法^①。这种方法由达利兹 (Richard Dalitz)^[173]在用 $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^+ \pi^-$ 衰变数据分析 $K^\pm$ 介子自旋时提出。分析的结果在 K 介子宇称破缺 (τ - θ 之谜) 的研究中起到了重要的作用。后来, 达利兹图被广泛应用于共振态参数、CKM 相角、混合参数和 CP 破坏的测量^[53,174]。

基于达利兹图提取三体衰变的振幅信息, 称为达利兹图分析 (Dalitz-plot analysis)。若在分析中考虑振幅随时间演化, 则称为含时达利兹图分析。不同三体衰变的达利兹图分析流程是相似的, 可在统一的分析框架下进行分析。目前公开的达利兹图分析框架有 `cfit`^[175], `Laura++`^[176]和 `GooFit`^[177]。表 A.1列出了这些框架的特性。

Belle II 实验数据积分亮度达到 50 ab^{-1} 时, 部分 D^0 三体衰变道的事例数将达到 10^7 量级。在这种数据量下, 单线程程序的拟合时间较长。

为减少物理分析的用时, 本工作基于 Hydra^[178-179]开发了一个新的达利兹图分析框架, DAFNE (DALitz-plot Fitter aNd Event generator)。这个框架支持 CPU 多线程的蒙特卡洛模拟、拟合和画图。DAFNE 和现有框架的对比见表 A.1。DAFNE 的代码仓库见^[180]。

表 A.1 达利兹图分析框架的对比。

[†]: `cfit`, `Laura++` 和 `GooFit` 实现了对特定过程的含时达利兹图分析。[#]: `Laura++` 的文章提到计划开发自动画出振幅成分的功能。^{*}: `GooFit` 有简单的配置文件接口。

	<code>cfit</code> ^[175]	<code>Laura++</code> ^[176]	<code>GooFit</code> ^[177]	DAFNE
含时达利兹图分析	✓ [†]	✓ [†]	✓ [†]	✓
多种传播子	✓	✓	✓	✓
探测器响应	×	✓	✓	✓
相位差的计算	✓	✓	×	✓
并行拟合	×	×	✓	✓
并行抽样	×	✓	✓	✓
自动画出振幅成分	×	×	×	✓
参数配置文件接口	✓	×	✓ [*]	✓

A.2 Hydra 框架

Hydra^[178-179]是一个 C++ 并行数据处理框架。Hydra 提供了适用于并行计算的数据容器。这些容器的接口与标准模板库 (Standard Template Library, STL) 类

^①一些工作中用拓展的达利兹图描述四体衰变。本工作仅讨论三体衰变。

似。Hydra 还提供了一系列高能物理研究中常用的算法。这些算法实现的功能包括：

- 并行计算多维函数值；
- 并行相空间抽样、积分和加权；
- ROOT::Minuit2 似然值计算的并行接口。

Hydra 框架基于 Thrust 并行计算库^[181]。Thrust 代码支持多种计算平台。基于 Hydra 编写的代码，可编译成单线程 CPU 的可执行文件 (CPP)，基于 OpenMP^[182] 的多线程 CPU 的可执行文件 (OMP)，基于 Intel Threading Building Blocks^[183-184] 的多线程 CPU 的可执行文件 (TBB)，以及基于 CUDA^[185] 的 GPU 的可执行文件 (CUDA)。

A.3 DAFNE 框架

本章节介绍 DAFNE 在 Hydra 框架基础之上新增的功能。

A.3.1 三体衰变振幅

DAFNE 基于文献^[28,175,186]定义了标量粒子衰变到三个标量粒子的振幅。此处简要介绍。

振幅的定义基于 Isobar 模型^[187-188]。Isobar 模型用级联的两体衰变和无中间共振态的纯相空间过程 (non-resonant, NR) 描述三体衰变，如图 A.1 所示。对于 $P \rightarrow abc$ 衰变，其振幅为

$$\mathcal{A}(m_{ab}^2, m_{ac}^2) = \sum_r c_r \mathcal{A}_r(m_{ab}^2, m_{ac}^2) + c_{NR} \mathcal{A}_{NR}(m_{ab}^2, m_{ac}^2) \quad . \quad (\text{A.1})$$

m_{ab}^2 为 a, b 粒子系统的不变质量的平方， m_{ac}^2 为 a, c 粒子系统的不变质量的平方。系数 c_r 和 c_{NR} 为复数。NR 过程的振幅 $\mathcal{A}_{NR}(m_{ab}^2, m_{ac}^2)$ 是一个实常数。

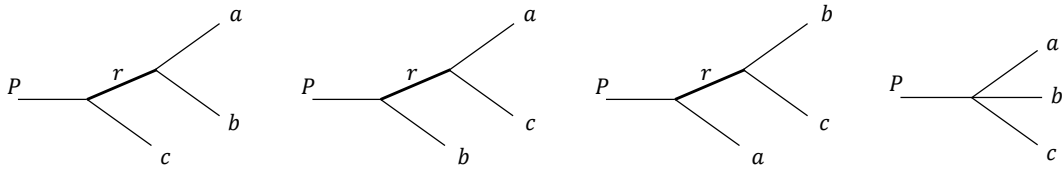


图 A.1 Isobar 模型的示意图。

对于级联两体衰变 $P \rightarrow cr, r \rightarrow ab$ ，其振幅为^[53,174]

$$\mathcal{A}_r(m_{ab}^2, m_{ac}^2) = \sum_{\lambda} \langle ab | r_{\lambda} \rangle T_r(m_{ab}) \langle cr_{\lambda} | P \rangle = W_l B_l^{Pc} B_l^{ab} T_r(m_{ab}) \quad ,$$

其中 $\sum_{\lambda}$ 对中间共振态 r 的所有螺旋态 (helicity) λ 求和。 W_l 为末态粒子的角分布。 l 为中间共振态的自旋。 B_l^{Pc} 和 B_l^{ab} 是 $P \rightarrow cr$ 和 $r \rightarrow ab$ 的势垒因子。 $T_r(m_{ab})$ 是

中间共振态 r 的传播子。DAFNE 实现的传播子有 Breit-Wigner, Gounaris-Sakurai, LASS, Generalized LASS, K-Matrix, Flatté 等。 W_l , B_l 和各种传播子的具体形式见文献^[186]。

不含时衰变率为

$$\text{pdf}(m_{ab}^2, m_{ac}^2) = |\mathcal{A}(m_{ab}^2, m_{ac}^2)|^2 / \mathcal{N} \quad , \quad (\text{A.2})$$

$\mathcal{N}$ 为归一化因子。

含时衰变振幅为:

$$T_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2, t) = A_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2) g_+(t) + \bar{A}_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2) \frac{q}{p} g_-(t) \quad . \quad (\text{A.3})$$

$g_{\pm}(t) = \theta(t) e^{-imt} e^{-\Gamma t/2} \frac{\cosh}{\sinh}(z\Gamma t/2)$ 。 m 为质量本征态质量的均值。 $z = -(y + ix)$ 。 x 和 y 为混合参数。 q/p 为 CP 破坏的参数 (详见章节 1)。 式 A.3 可描述自共轭道和非自共轭道的含时衰变振幅。 对于非自共轭道, 当忽略 $O(t^2)$ 项时, 式 A.3 中的混合参数等价于 $x' = x \cos \delta + y \sin \delta$ 和 $y' = y \cos \delta - x \sin \delta$ 。 δ 为 A_f 和 $\bar{A}_f$ 的平均相位差。 细节见附录 E.4。

含时衰变率为:

$$\text{pdf}(m_{ab}^2, m_{ac}^2, t) = |T_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2, t)|^2 / \mathcal{N} \quad ,$$

$\mathcal{N}$ 为归一化因子。

A.3.2 探测器响应

DAFNE 考虑了探测器响应。

对于重建效率, DAFNE 通过将效率与概率分布函数相乘得到新的概率分布函数实现

$$\varepsilon(m_{ab}^2, m_{ac}^2) \text{pdf}(m_{ab}^2, m_{ac}^2) / \mathcal{N} \quad , \quad (\text{A.4})$$

$\mathcal{N}$ 为归一化因子。 用户可方便地设置解析或离散的重建效率 $\varepsilon(m_{ab}^2, m_{ac}^2)$ 。

对于达利兹图的分辨率, DAFNE 可先基于振幅抽样得到无探测器分辨率的运动学变量, 再通过基于二维分辨率的抽样, 得到含有探测器分辨率的 Toy MC^①。 对于衰变时间的分辨率, DAFNE 通过解析卷积实现:

$$\text{pdf}(m_{ab}^2, m_{ac}^2, t, \sigma_t) \propto |T_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2; t)|^2 \otimes R(t, \sigma_t) \quad . \quad (\text{A.5})$$

其中 σ_t 是衰变时间的误差。 分辨率函数 $R(t, \sigma_t)$ 由 σ_t 的分布 $\text{pdf}(\sigma_t)$ 和条件概率 $R(t|\sigma_t)$ 定义:

$$R(t, \sigma_t) = R(t|\sigma_t) \text{pdf}(\sigma_t) \quad . \quad (\text{A.6})$$

^①目前 DAFNE 仅实现在 Toy MC 产生中的达利兹图分辨, 未实现在拟合中的达利兹图分辨率。

则 $\text{pdf}(m_{ab}^2, m_{ac}^2, t, \sigma_t)$ 可用 $\text{pdf}(\sigma_t)$ 和条件概率 $\text{pdf}(m_{ab}^2, m_{ac}^2, t | \sigma_t)$ 表示

$$\begin{aligned} \text{pdf}(m_{ab}^2, m_{ac}^2, t, \sigma_t) &= \left[\frac{|T_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2; t)|^2 \otimes R(t | \sigma_t)}{\mathcal{N}} \right] \text{pdf}(\sigma_t) \\ &= \text{pdf}(m_{ab}^2, m_{ac}^2, t | \sigma_t) \text{pdf}(\sigma_t) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

由式 A.3 可得

$$\begin{aligned} |T_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2; t)|^2 &= \left| \frac{A_f + \frac{q}{p} \bar{A}_f}{2} \right|^2 e^{-(1+y)\Gamma t} \\ &\quad + \left| \frac{A_f^* - (\frac{q}{p})^* \bar{A}_f^*}{2} \right|^2 e^{-(1-y)\Gamma t} \\ &\quad + 2\text{Re} \left[\frac{A_f + \frac{q}{p} \bar{A}_f}{2} \frac{A_f^* - (\frac{q}{p})^* \bar{A}_f^*}{2} e^{-(1+ix)\Gamma t} \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

DAFNE 中 $R(t | \sigma_t)$ 为单高斯分布

$$R(t | \sigma_t) = G(t, b, s\sigma_t) \quad . \quad (\text{A.9})$$

指数函数和高斯分布的卷积为^[110]

$$e^{-(1\pm y)\Gamma t} \otimes G(t, b, s\sigma_t) = \psi(\chi, \kappa_{\pm}) \quad , \quad (\text{A.10})$$

$$e^{-(1+ix)\Gamma t} \otimes G(t, b, s\sigma_t) = \psi(\chi, \kappa_i) \quad , \quad (\text{A.11})$$

其中

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{t - \mu}{s\sigma_t}, \quad \kappa_{\pm} = (1 \pm y)\Gamma s\sigma_t, \quad \kappa_i = (1 + ix)\Gamma s\sigma_t, \\ \psi(\chi, \kappa) &= \frac{1}{2} e^{\frac{\kappa^2 - 2\chi\kappa}{2}} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{\chi - \kappa}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

则条件概率

$$\begin{aligned} \text{pdf}(m_{ab}^2, m_{ac}^2, t | \sigma_t) &= \left\{ \left| \frac{A_f + \frac{q}{p} \bar{A}_f}{2} \right|^2 \psi(\chi, \kappa_+) \right. \\ &\quad + \left| \frac{A_f^* - (\frac{q}{p})^* \bar{A}_f^*}{2} \right|^2 \psi(\chi, \kappa_-) \\ &\quad \left. + 2\text{Re} \left[\frac{A_f + \frac{q}{p} \bar{A}_f}{2} \frac{A_f^* - (\frac{q}{p})^* \bar{A}_f^*}{2} \psi(\chi, \kappa_i) \right] \right\} / \mathcal{N} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A.3.3 本底

DAFNE 支持用二维解析函数或二维直方图定义本底。

A.3.4 配置文件接口

DAFNE 框架实现了灵活参数配置文件接口。用户可通过配置文件设置振幅模型和其中的参数，无需重新编译。

振幅状态的设置方法如下

```
amplitudes_setting {
# name      status
#-----
Kstm        floating
rho0        floating
omega       floating
K0stm_1430  removed
} amplitudes_setting
```

第一列为振幅的名称,应和程序中的振幅名称相同。第二列为振幅状态,“floating”表示振幅模型中包含该振幅,“removed”表示振幅模型中不包含该振幅。用户需手动固定“removed”振幅的参数。当“floating”和“removed”的振幅有共享参数时,用户根据需求固定或浮动共享参数。使用配置文件设置振幅前,用户需在 DAFNE 程序中将所有可能的振幅成分写出,DAFNE 无法通过配置文件添加原本程序中没有的振幅。

振幅参数的设置方法如下

```
amplitude_parameters_setting {
# Coefficients of resonances
# name      = value +- uncertainty limits_option
#-----
rerho0      = 1.0      +- 0.1      C
reKstm      = -1.196090 +- 0.005755 F
reomega     = -0.019235 +- 0.000670 E 10
reK0stm_1430 = -0.393116 +- 0.037100 V 10

imrho0      = 0.0      +- 0.1      C
imKstm      = 1.256890 +- 0.006278 F
imomega     = 0.037376 +- 0.000529 E 10
imK0stm_1430 = -5.284940 +- 0.030800 V 10
} amplitude_parameters_setting
```

每一行对应一个实参数。第一列为参数的名称,应和程序中的参数名称相同。第二和第三列为参数的中心值和误差。第四列是参数的状态,“C”代表参数固定;“F”表示参数浮动,没有范围限制;“V x”表示参数浮动,范围为中心值的 $\pm x\%$;“E x”表示参数浮动,范围为 $\pm x\sigma$;“L l h”表示参数浮动,范围为 (l, h) 。混合参数,衰变时间的分辨率参数和本底参数也可用同样的方式设置。

离散的达利兹图效率设置方法如下

```
efficiency_histogram_setting {

XTicks: 0,0.1,0.3,0.6,1.9,
YTicks: -1,-0.84,-0.6,0.6,0.84,1,

Zs:
0.120000,0.100000,0.100000,0.110000,
0.125000,0.110000,0.110000,0.115000,
0.121000,0.120000,0.119000,0.119000,
0.121000,0.120000,0.114000,0.117000,
0.111000,0.105000,0.104000,0.112000,

ZErrors:
0.006000,0.001300,0.001100,0.000600,
```

```

0.005000,0.001200,0.000900,0.000600,
0.002500,0.000600,0.000400,0.000300,
0.005000,0.001200,0.000900,0.000600,
0.006000,0.001400,0.001000,0.000700,
} efficiency_histogram_setting

```

“XTicks”为X轴离散区域的端点，“YTicks”为Y轴离散区域的端点。“Zs”为每个区域的效率，“ZErrors”为效率的误差。以上代码对应的达利兹图效率如图 A.2所示。

达利兹图分辨率的设置方法如下

```

resolution2D_setting {
# xmin xmax ymin ymax rmsx rmsy rho
0.000000 0.400000 -1.010000 -0.600000 0.001400 0.002000 -0.120
0.000000 0.400000 -0.600000 -0.200000 0.001500 0.003000 -0.080
0.000000 0.400000 -0.200000 0.200000 0.001600 0.004000 0.000
0.000000 0.400000 0.200000 0.600000 0.001500 0.003000 0.080
0.000000 0.400000 0.600000 1.010000 0.001400 0.002000 0.120
0.400000 0.800000 -1.010000 -0.600000 0.002500 0.002000 -0.040
0.400000 0.800000 -0.600000 -0.200000 0.002600 0.003000 -0.020
0.400000 0.800000 -0.200000 0.200000 0.002700 0.004000 0.000
0.400000 0.800000 0.200000 0.600000 0.002600 0.003000 0.020
0.400000 0.800000 0.600000 1.010000 0.002500 0.002000 0.040
0.800000 1.200000 -1.010000 -0.600000 0.003500 0.002000 0.040
0.800000 1.200000 -0.600000 -0.200000 0.003600 0.003000 0.030
0.800000 1.200000 -0.200000 0.200000 0.003700 0.004000 0.000
0.800000 1.200000 0.200000 0.600000 0.003600 0.003000 -0.030
0.800000 1.200000 0.600000 1.010000 0.003500 0.002000 -0.040
1.200000 1.600000 -1.010000 -0.600000 0.003500 0.002000 0.050
1.200000 1.600000 -0.600000 -0.200000 0.003600 0.003000 0.025
1.200000 1.600000 -0.200000 0.200000 0.003700 0.004000 0.000
1.200000 1.600000 0.200000 0.600000 0.003600 0.003000 -0.025
1.200000 1.600000 0.600000 1.010000 0.003500 0.002000 -0.050
1.600000 2.000000 -1.010000 -0.600000 0.003700 0.002000 0.300
1.600000 2.000000 -0.600000 -0.200000 0.003800 0.003000 0.100
1.600000 2.000000 -0.200000 0.200000 0.003900 0.004000 0.000
1.600000 2.000000 0.200000 0.600000 0.003800 0.003000 -0.100
1.600000 2.000000 0.600000 1.010000 0.003700 0.002000 -0.300
} resolution2D_setting

```

每行表示一个区域的分辨率。前四列定义区域的边界，第五和第六列为区域的X轴和Y轴变量的分辨率，第七列为两分辨率的相关系数。以上代码对应的达利兹图分辨率如图 A.2所示。

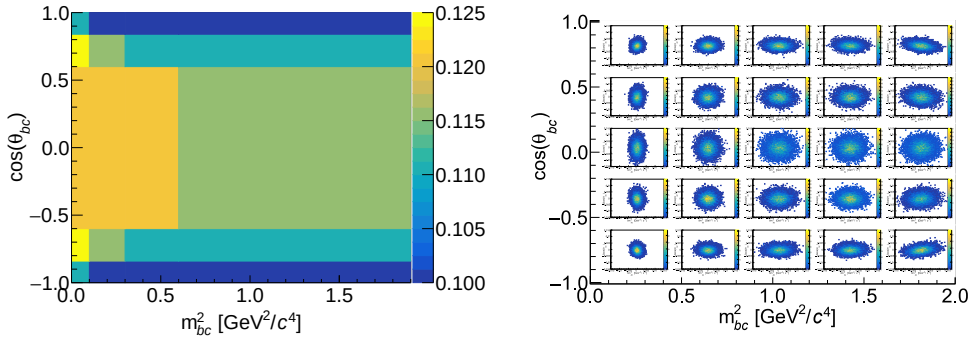


图 A.2 示例配置文件的达利兹图效率和分辨率。

右图中,每张小图的横坐标为 δm_{bc}^2 , 范围 $[-0.015, 0.015] \text{ GeV}^2/c^4$; 纵坐标为 $\delta \cos(\theta_{bc})$, 范围 $[-0.015, 0.015]$ 。 δm_{bc}^2 和 $\delta \cos(\theta_{bc})$ 的定义参考章节 3.4。

A.3.5 自动画图

DAFNE 框架可自动画出数据、振幅模型、pull 和振幅模型中的振幅成分，如图 A.8 所示。对于 DAFNE 的 OpenMP 或 TBB 多线程程序，画图的过程是并行的。

A.3.6 相位差的计算

DAFNE 可根据式 A.14 计算 A_f 和 $\bar{A}_f$ 在相空间某点的相位差。

$$\delta(m_{ab}^2, m_{ac}^2) = \text{Arg}(A_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2)\bar{A}_f^*(m_{ab}^2, m_{ac}^2)) \quad . \quad (\text{A.14})$$

DAFNE 还可根据式 A.15-A.17 计算 A_f 和 $\bar{A}_f$ 在指定达利兹图区间的平均相位差。

$$F_b = \int_b |A_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2)|^2 dm_+^2 dm_-^2 \quad , \quad (\text{A.15})$$

$$\bar{F}_b = \int_b |\bar{A}_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2)|^2 dm_+^2 dm_-^2 \quad , \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} X_b &= \frac{1}{\sqrt{F_b \bar{F}_b}} \int_b A_f^*(m_{ab}^2, m_{ac}^2) \bar{A}_f(m_{ab}^2, m_{ac}^2) dm_+^2 dm_-^2 \\ &= c_b - i s_b \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

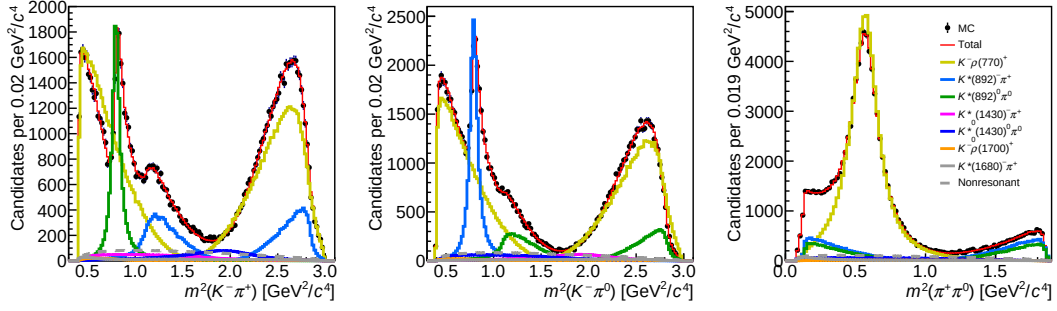
b 为达利兹图区间的编号。

A.4 使用案例与性能测试

本章节介绍 DAFNE 的使用案例，展示 DAFNE 在案例中的耗时。本章节的测试结果基于一台装有两个 Intel(R) Xeon(R) Silver 4214R CPU @ 2.40GHz 的服务器。

A.4.1 CLEO 的 $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ 衰变模型

根据 CLEO 合作组的 $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ 衰变达利兹图分析结果^[189]在 DAFNE 中建立振幅模型。产生的 MC 样本分布如图 A.3 和 A.4 所示。图 A.3 中的直方图为振幅模型和其中的成分。在相空间中抽样 10^6 次，计算各成分的占比 (fraction)。如表 A.2 所示，计算结果与文献^[189]的结果基本一致，仅 $\rho(1700)^+ K^-$ 计算结果不同。由此，DAFNE 基本复现了 CLEO 的模型。


 图 A.3 DAFNE 基于 CLEO 模型产生的 $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ MC 样本的分布。

点表示 MC 样本，直方图表示振幅模型和其成分。

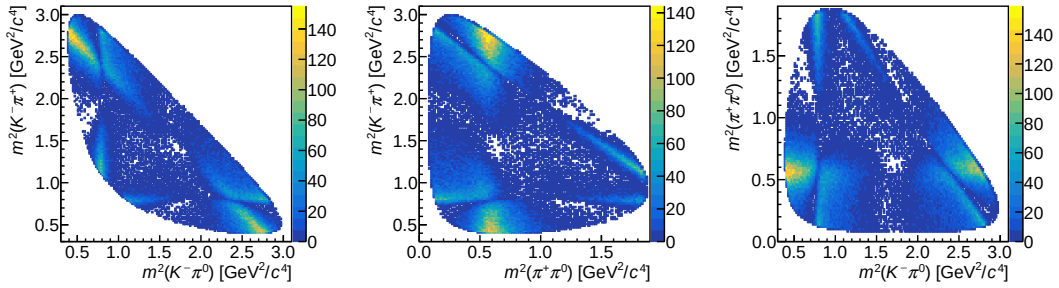

 图 A.4 DAFNE 基于 CLEO 模型产生的 $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ MC 样本的达利兹图。

表 A.2 DAFNE 计算的占比和 CLEO 测量结果的对比。

DAFNE 计算结果的误差比 CLEO 的误差小一个量级，在表中忽略。

成分	CLEO	DAFNE
$\rho(770)^+ K^-$	0.788 ± 0.051	0.769
$K^*(892)^- \pi^+$	$0.161^{+0.026}_{-0.013}$	0.164
$\bar{K}^*(892)^0 \pi^0$	0.127 ± 0.018	0.126
$\rho(1700)^+ K^-$	0.057 ± 0.012	0.009
$\bar{K}^*(1430)^0 \pi^0$	$0.041^{+0.032}_{-0.010}$	0.040
$\bar{K}^*(1430)^- \pi^+$	0.033 ± 0.015	0.033
$\bar{K}^*(1680)^- \pi^+$	0.013 ± 0.005	0.015
Non-resonant	$0.075^{+0.057}_{-0.014}$	0.073

A.4.2 BaBar 的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时衰变模型

根据 BaBar 实验的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时达利兹图分析结果^[175,190]在 DAFNE 中建立振幅模型。用 BaBar 实验组的 cfit 程序^[175]和 DAFNE 框架按照相同的振幅参数和相同的混合参数 ($x = 0.004$, $y = 0.006$) 产生 5×10^6 个事例。两个样本的对比如图 A.5和 A.6所示。图中 m_+^2 和 m_-^2 的定义与章节 4 相同。用 DAFNE 和 cfit 计算 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 和其电荷共轭过程的振幅的相位差。计算结果的对比如图 A.7所示。可见两者差别很小，DAFNE 基本复现了 BaBar 的衰变模型。

基于此模型用 DAFNE 计算在平均分区 (见章节 4) 的衰变率比值 (r_b) 和相位

差 (c_b, s_b)。计算结果接近 BESIII 和 CLEO 的测量结果^[106-107]，如表 A.3所示。

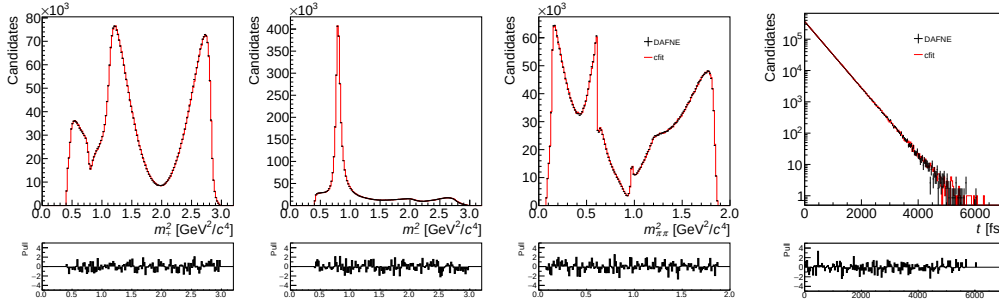


图 A.5 DAFNE 和 cfit 样本的一维分布对比。

点为 DAFNE 产生的样本，直方图为 cfit 产生的样本。

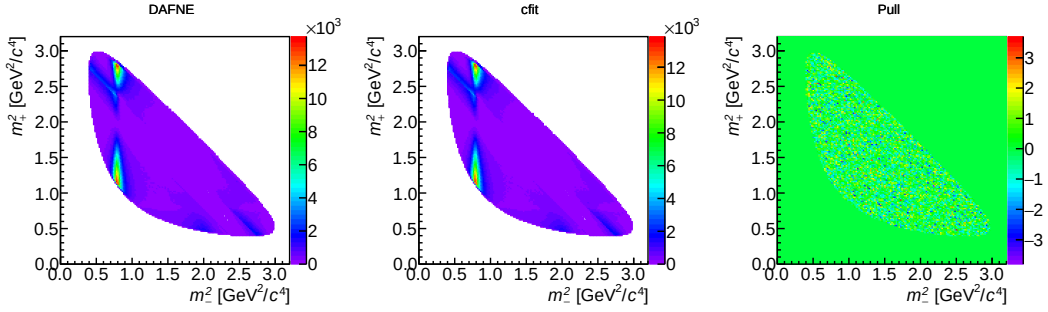


图 A.6 DAFNE 和 cfit 样本的达利兹图对比。

左侧两图为 DAFNE 和 cfit 样本的达利兹图分布，右图为 pull 分布。

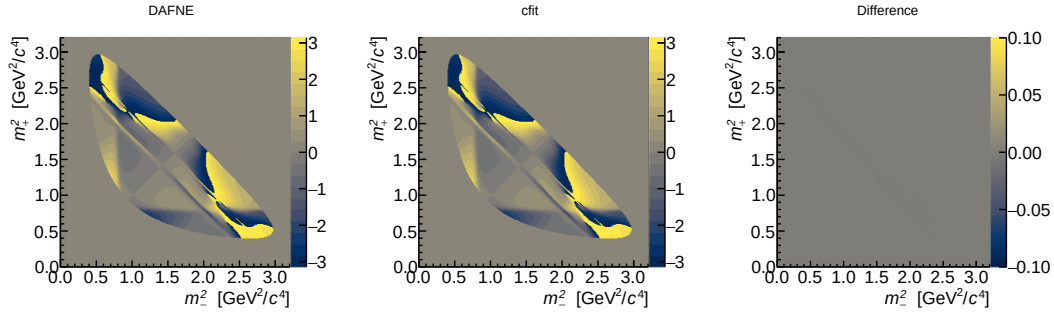


图 A.7 DAFNE 和 cfit 计算的相位差的对比。

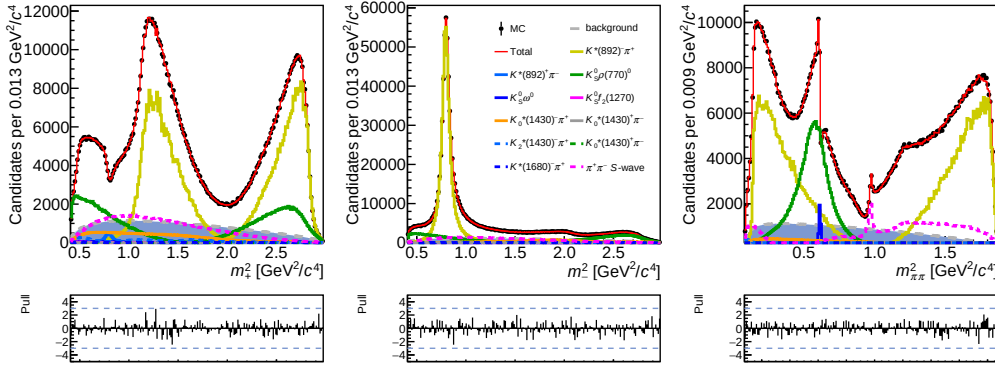
左侧两图为 DAFNE 和 cfit 的计算结果，右图为两结果之差。

表 A.3 DAFNE 计算的平均分区的概率的比值 (r_b) 和相位差 (c_b, s_b)。

表中还展示了 BESIII 和 CLEO 的测量结果^[191-192]。表中 BESIII 和 CLEO 结果的误差包含统计误差和系统误差。DAFNE 计算结果的误差比 BESIII 和 CLEO 的误差小一个量级，在表中忽略。

BESIII + CLEO			DAFNE		
r_b	c_b	s_b	r_b	c_b	s_b
0.477 ± 0.014	0.699 ± 0.020	0.091 ± 0.063	0.481	0.672	-0.032
0.233 ± 0.013	0.643 ± 0.036	0.300 ± 0.110	0.220	0.632	0.398
0.304 ± 0.017	0.001 ± 0.047	1.000 ± 0.075	0.275	0.088	0.851
0.667 ± 0.050	-0.608 ± 0.052	0.660 ± 0.123	0.678	-0.490	0.784
0.614 ± 0.028	-0.955 ± 0.023	-0.032 ± 0.069	0.589	-0.947	0.113
0.207 ± 0.019	-0.578 ± 0.058	-0.545 ± 0.122	0.239	-0.681	-0.454
0.103 ± 0.008	0.057 ± 0.057	-0.854 ± 0.095	0.108	-0.131	-0.814
0.218 ± 0.009	0.411 ± 0.036	-0.433 ± 0.083	0.209	0.382	-0.483

用 DAFNE 产生不含时的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 的 MC 样本。样本事例数约为 1×10^6 ，考虑达利兹图的效率和分辨率，设本底事例占比为 15%^①。拟合该 MC 样本，结果如图 A.8 所示。表 A.4 对比了振幅参数的拟合值与输入值，两者一致。表中 c_r 为振幅的系数，其余参数的定义见文献^[186,190]。


图 A.8 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 不含时达利兹图拟合结果。

点表示 MC 样本，直方图表示振幅模型和其成分。

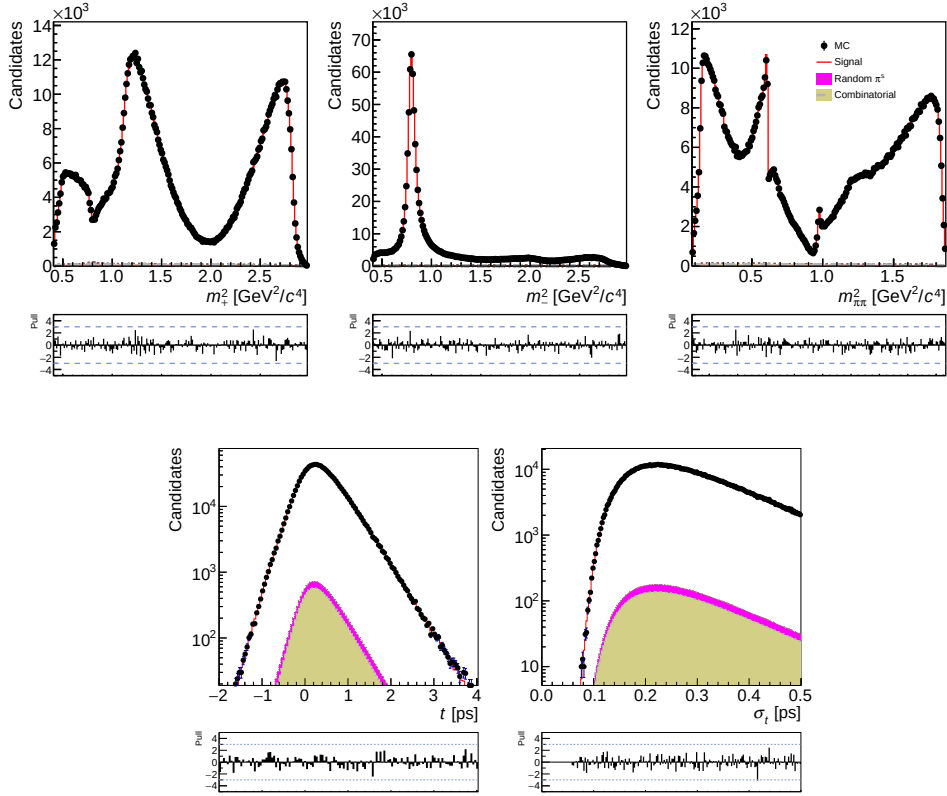
^①此处本底占比设为 15%，目的是在演示画图时，能明显地看见本底。不反应数据中实际的本底比例。

表 A.4 $D^0 \rightarrow K_s^0 \pi^+ \pi^-$ 不含时拟合中, 振幅参数的拟合结果与输入值的对比。

参数	输入值	拟合值	参数	输入值	拟合值
$Re[c_{K^{*-}}]$	-1.196	-1.192 ± 0.008	$Re[\beta_0]$	-5.533	-5.509 ± 0.126
$Re[c_{K^{*+}}]$	0.118	0.119 ± 0.003	$Re[\beta_1]$	15.634	15.531 ± 0.398
$Re[c_\omega]$	-0.019	-0.019 ± 0.001	$Re[\beta_2]$	40.866	39.695 ± 2.453
$Re[c_{f_2(1270)}]$	0.396	0.371 ± 0.019	$Re[\beta_3]$	6.139	6.811 ± 0.925
$Re[c_{K_0^{*0}(1430)-}]$	-0.393	-0.411 ± 0.066	$Im[\beta_0]$	0.299	0.226 ± 0.172
$Re[c_{K_0^{*0}(1430)+}]$	0.059	0.077 ± 0.030	$Im[\beta_1]$	0.263	0.259 ± 0.327
$Re[c_{K_2^{*0}(1430)-}]$	1.042	1.009 ± 0.030	$Im[\beta_2]$	-17.781	-17.322 ± 1.542
$Re[c_{K_2^{*0}(1430)+}]$	0.103	0.103 ± 0.015	$Im[\beta_3]$	-6.929	-6.774 ± 0.595
$Re[c_{K^{*0}(1680)-}]$	-0.889	-0.925 ± 0.070	$Re[f_{11}^{prod}]$	-11.424	-11.573 ± 0.249
$Im[c_{K^{*-}}]$	1.257	1.250 ± 0.008	$Re[f_{12}^{prod}]$	-6.602	-6.333 ± 1.323
$Im[c_{K^{*+}}]$	-0.114	-0.114 ± 0.002	$Re[f_{13}^{prod}]$	-3.796	-4.051 ± 1.861
$Im[c_\omega]$	0.037	0.037 ± 0.001	$Im[f_{11}^{prod}]$	0.056	-0.049 ± 0.217
$Im[c_{f_2(1270)}]$	-0.105	-0.067 ± 0.020	$Im[f_{12}^{prod}]$	14.002	13.884 ± 1.418
$Im[c_{K_0^{*0}(1430)-}]$	-5.285	-5.191 ± 0.049	$Im[f_{13}^{prod}]$	-5.829	-4.951 ± 1.767
$Im[c_{K_0^{*0}(1430)+}]$	-0.285	-0.276 ± 0.031			
$Im[c_{K_2^{*0}(1430)-}]$	-0.782	-0.756 ± 0.027			
$Im[c_{K_2^{*0}(1430)+}]$	-0.051	-0.064 ± 0.014			
$Im[c_{K^{*0}(1680)-}]$	-0.150	-0.077 ± 0.104			
$M_{f_2(1270)}$	1.275	1.278 ± 0.008			
$M_{K_0^{*0}(1430)}$	1.422	1.420 ± 0.002			
$M_{K_2^{*0}(1430)}$	1.426	1.424 ± 0.001			
$M_{K^{*0}(1680)}$	1.677	1.675 ± 0.014			
$\Gamma_{f_2(1270)}$	0.185	0.169 ± 0.015			
$\Gamma_{K_0^{*0}(1430)}$	0.247	0.246 ± 0.003			
$\Gamma_{K_2^{*0}(1430)}$	0.099	0.095 ± 0.002			
$\Gamma_{K^{*0}(1680)}$	0.205	0.253 ± 0.030			

用 DAFNE 产生含时的 $D^0 \rightarrow K_s^0 \pi^+ \pi^-$ MC 样本。样本事例数约为 1×10^6 , 考虑达利兹图的效率和分辨率, 考虑衰变时间的分辨率, 考虑随机 π 介子本底和组合本底。本底占比和文献^[40,186,190]接近。拟合该 MC 样本, 结果如图 A.9所示。拟合中 D^0 寿命 (τ), 混合参数 x 和 y , 时间分辨参数 b 和 s (见章节 A.3.2) 浮动, 其余参数固定。表 A.5对比了参数的拟合值和输入值, 两者一致。

表 A.6列出了以上案例的耗时。多线程可执行文件 (OMP 和 TBB) 的耗时比单线程可执行文件 (CPP) 少 10 倍。


 图 A.9 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时达利兹图拟合结果。

图中展示了达利兹图的一维投影、衰变时间和衰变时间误差的分布。点表示 MC 样本，直方图表示振幅模型和其成分。

 表 A.5 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时拟合结果与输入值的对比。

参数	输入值	拟合值
τ	410.1 fs	410.8 ± 0.7 fs
x	4.0×10^{-3}	$(3.3 \pm 1.2) \times 10^{-3}$
y	6.0×10^{-3}	$(6.4 \pm 1.0) \times 10^{-3}$
b	0.000	-0.001 ± 0.001
s	1.200	1.198 ± 0.002

表 A.6 耗时对比。

场景	CPP	OMP	TBB
$D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ 不含时 MC 产生， 无探测器响应，事例数 $\sim 1 \times 10^4$	15.5 秒	1.3 秒	1.7 秒
$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时 MC 产生， 无探测器响应，事例数 $\sim 5 \times 10^6$	57.4 分钟	4.8 分钟	5.2 分钟
$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 不含时 MC 产生， 有探测器响应，事例数 $\sim 1 \times 10^6$	20.5 分钟	1.3 分钟	1.7 分钟
$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 不含时拟合， 有探测器响应，事例数 $\sim 1 \times 10^6$	55.5 小时	5.0 小时	5.1 小时
$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时 MC 产生， 有探测器响应，事例数 $\sim 1 \times 10^6$	31.9 分钟	1.4 分钟	1.3 分钟
$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 含时拟合， 有探测器响应，事例数 $\sim 1 \times 10^6$	30.0 分钟	3.2 分钟	3.7 分钟

A.5 总结

本工作开发了一个含时达利兹图分析框架 DAFNE。这个框架支持并行的 MC 产生、拟合和画图，可缩短物理分析工作的耗时。DAFNE 已在 Belle II 的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 衰变混合参数测量中起到重要作用 (章节 1-6)。Belle II 合作组内正在进行的一些工作也使用 DAFNE 作为辅助工具。

附录 B $D^0\text{-}\bar{D}^0$ 混合测量的补充材料

B.1 K_S^0 重建对效率的影响

Belle II 数据和 MC 的 K_S^0 重建效率随 K_S^0 飞行距离的变化趋势不完全一致^[193]。本工作基于数据和 MC 中的 $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$, $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 衰变样本, 观察到了与文献^[193]类似的效应, 如图 B.1 所示。修正 K_S^0 重建效率后, D^{*+} 重建效率随达利兹图的变化趋势和随 D^0 衰变时间的变化趋势如图 B.2 所示。图中的重建效率和 K_S^0 效率修正前 (章节 3.4) 差别很小。本工作忽略 K_S^0 效率修正的影响。

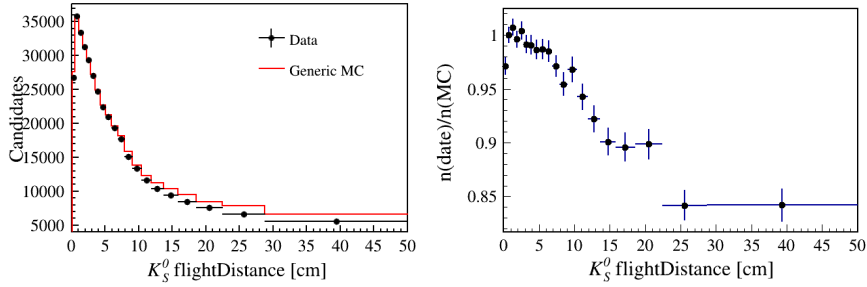


图 B.1 D^{*+} 候选者数随 K_S^0 飞行距离的变化。

左图点表示数据, 直方图表示 generic MC。右图两者之比。可见比例随 K_S^0 飞行距离改变。

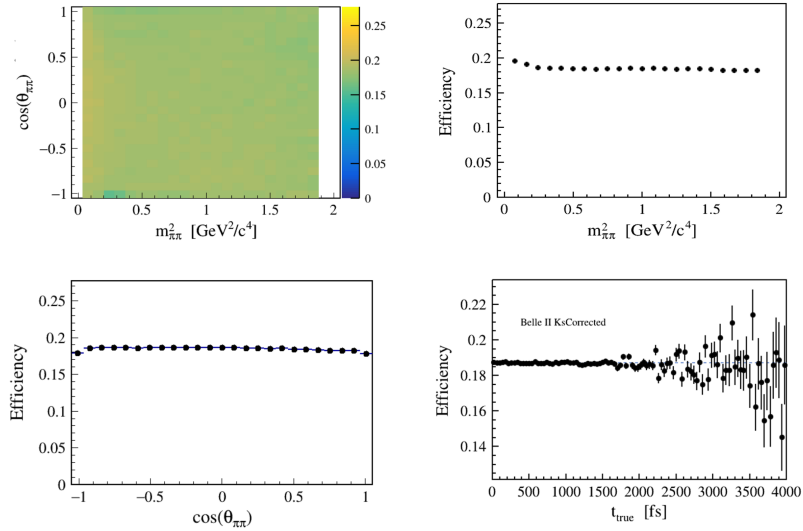


图 B.2 K_S^0 效率修正后, D^{*+} 重建效率随达利兹图和 D^0 衰变时间的变化趋势。

B.2 最好候选者选择对达利兹图效率的影响

排除克隆径迹之前，Belle(BelleII) genericMC 中，包含克隆径迹的信号候选者在所有信号候选者中的占比在百分之一(千分之一)量级。正文中使用对比同一事例中不同候选者的径迹相似度的方法识别和排除克隆径迹。若用最好候选者选择(Best Candidate Selection, BCS)^①解决克隆径迹问题，则达利兹图的效率会出现明显的不对称。图 B.3 为使用随机最好候选者选择^②后的达利兹图效率。可见右下角的效率明显低于左上角。图 B.3 的横纵坐标对应 $m_{\pi\pi}^2$ 和 $m_{\pi\pi}^2$ ，图中还标出了 $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $m_{\pi\pi}^2$ 的变化方向。

图 B.3 右下角效率低的原因如下。对于部分 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \approx -1$ 的 $D^{*+} \rightarrow D^0(\rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-) \pi^+$ 候选者， D^{*+} 衰变的 π^+ 和 D^0 衰变的 π^+ 动量非常接近。两者交换后， D^{*+} 候选者依然满足所有选择条件。因此在这个区域，这种“交换 π 介子本底”的占比高于达利兹图的其他区域，最终导致该区域总本底的占比明显高于其他区域，如图 B.4 所示。高本底导致这个区域的随机最好候选者选择出错的概率大于其他区域。本工作还尝试了基于最小的 TreeFit χ^2 的最好候选者选择，其效果与随机最好候选者选择接近。图 B.5 中的红点为分别使用这两种最好候选者选择后效率随 $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 的变化^③。为更好的展示达利兹图的 R1 和 R2 区域(图 B.3)的不对称程度，图 B.5 中画出了效率以 $\cos(\theta_{\pi\pi}) = 0$ 为轴的镜像对称图，如蓝点所示。对比可知， $\cos(\theta_{\pi\pi}) = -1$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) = 1$ 处的效率有明显的区别。

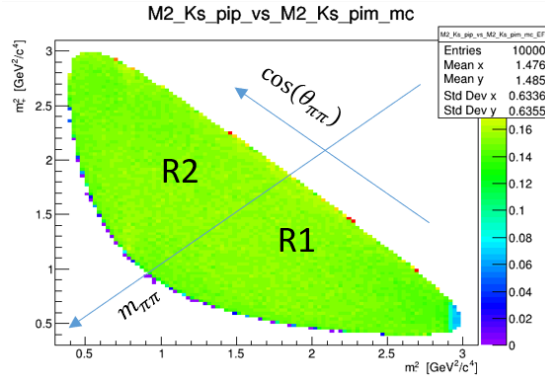


图 B.3 使用随机最好候选者选择后的达利兹图效率。

使用随机最好候选者选择后，右下角的效率明显低于左上角。图中标出了 $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 和 $m_{\pi\pi}$ 的变化方向，达利兹图被分成右下的 R1 区和左上的 R2 区。

^①最好候选者选择，即根据某种条件，在每个事例中只保留一个候选者

^②即在每个事例中随机保留一个候选者

^③由图 B.3 可知，效率随 $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 的变化明显

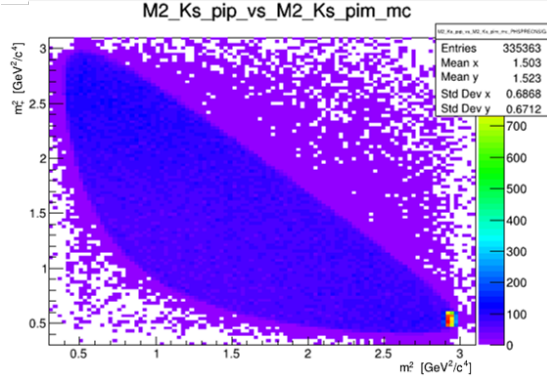
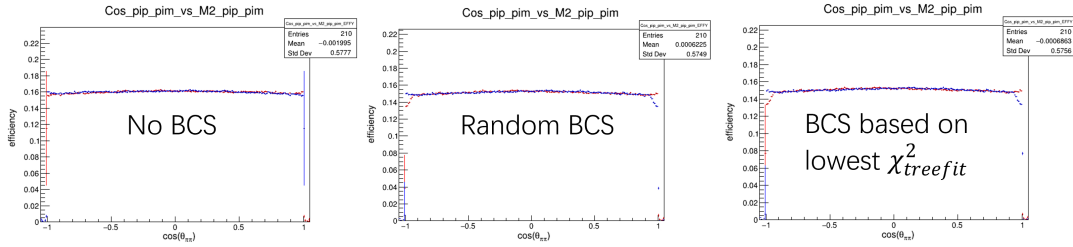


图 B.4 本底的达利兹图。

$\cos(\theta_{\pi\pi}) \approx -1$ 区域的本底明显高于其他区域。

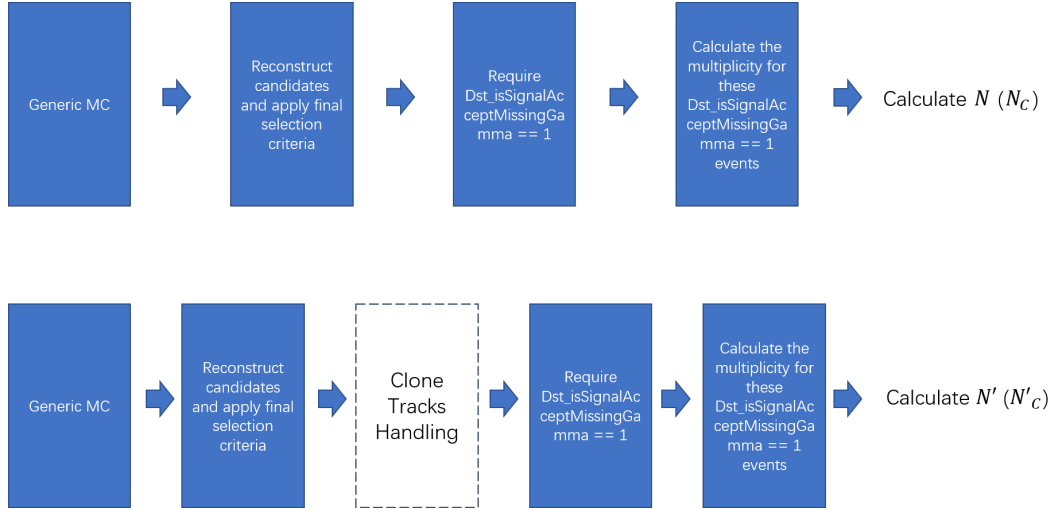

 图 B.5 效率随 $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 的变化。

在不使用最好候选者选择，使用随机候选者选择，使用最小 $\chi^2_{treefit}$ 候选者选择时，效率 (ϵ) 随 $\cos(\theta_{\pi\pi})$ 的变化趋势。红点表示 $\epsilon(\cos(\theta_{\pi\pi}))$ ，蓝点表示 $\epsilon(-\cos(\theta_{\pi\pi}))$ 。

B.3 克隆径迹排除

章节 3.1 用对比候选者的径迹相似程度的方法选出和排除克隆径迹。本章节验证此方法的效果。用比值 $R = N'/N$ ($R_C = N'_C/N_C$) 表征此方法对克隆径迹的排除效果。 $N(N_C)$ 为排除克隆径迹前，含有克隆径迹的事例数 (候选者数)。 $N'(N'_C)$ 为排除克隆径迹后，含有克隆径迹的事例数 (候选者数)。在经过除克隆径迹排除外的所有选择条件的 generic MC 样本中，用 basf2 的 MC match 工具提取出成功重建的候选者。基于这些候选者，选出包含两个成功候选者的事例。事例的个数即为 N 。事例中所有成功重建的候选者数即为 N_C 。对此 generic MC 样本进行径迹排除后，用相同方法可得 N' 和 N'_C 。流程如图 B.6 所示。

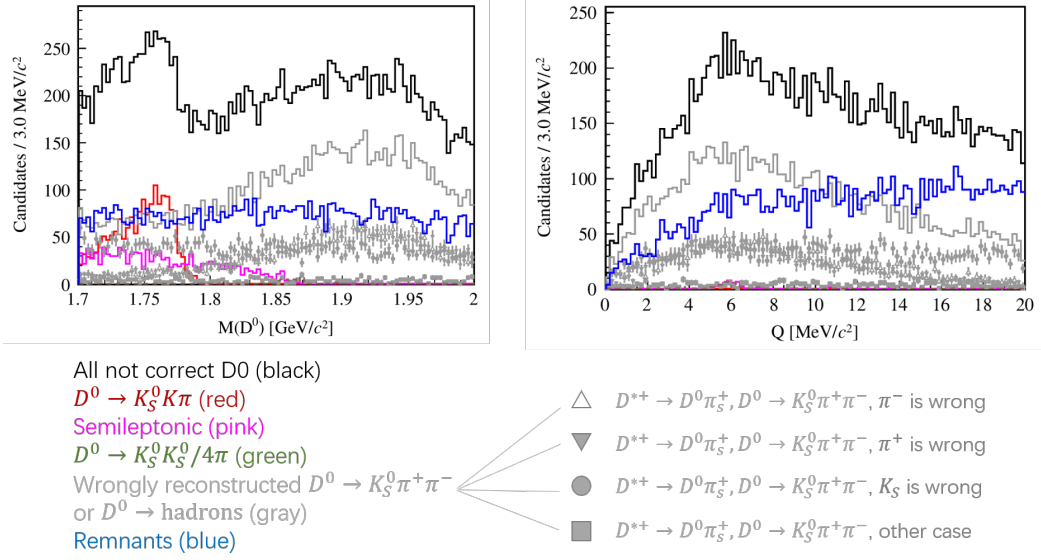
在 Belle (Belle II) 的 generic MC 中，包含克隆径迹的候选者的占比在百分之一 (千分之一) 量级。经过克隆径迹排除后，此类候选者减少 50 倍。


 图 B.6 $N(N_C)$ 和 $N'(N'_C)$ 的计算。

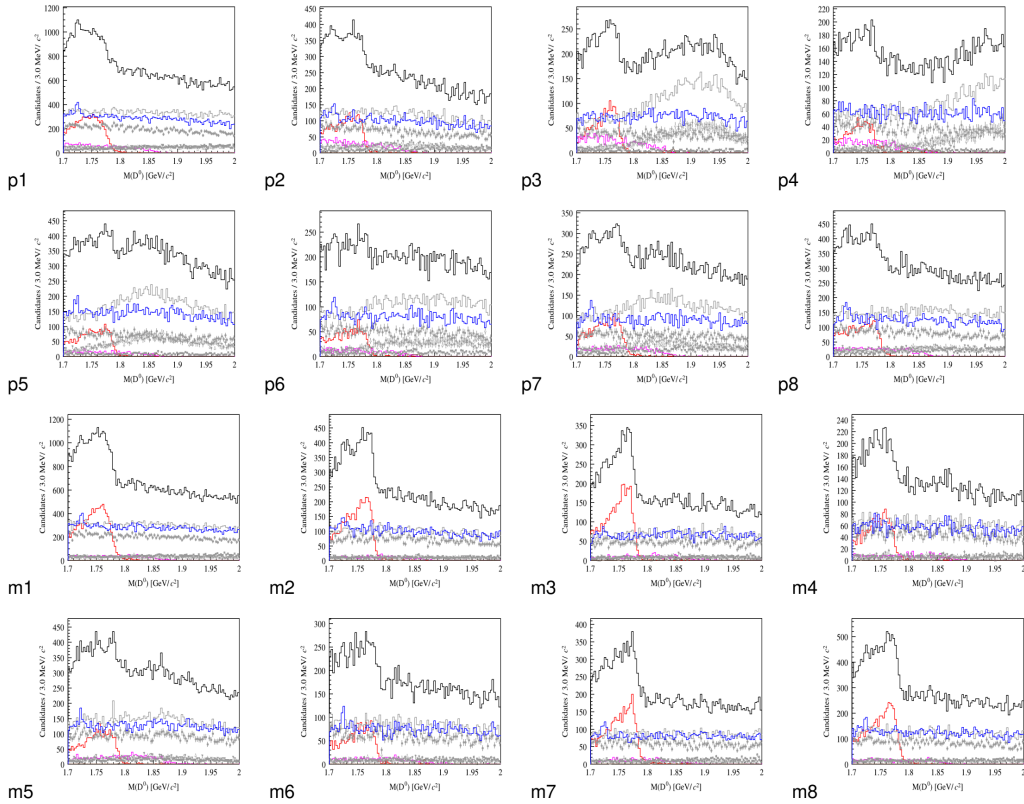
B.4 重建错误的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 候选者的分布

重建错误的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 候选者在信号区间的占比为百分之一量级。当仅有一个 D^0 子粒子重建错误，候选者的 $M(D^0)$ 和 Q 分布上会出现平缓的峰。在某些达利兹图区域，这种峰比较明显。比如，图 B.7 所展示的 +3 区。图中展示了仅 D^0 的 π^- 重建错误的候选者分布 (空心三角形)，仅 D^0 的 π^+ 重建错误的候选者分布 (实心三角形)，仅 D^0 的 K_S^0 重建错误的候选者分布 (圆形) 和其他重建错误的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 衰变 (正方形)。其余达利兹图区间的本底 $M(D^0)$ 和 Q 分布，如图 B.8 和 B.9 所示。图中还用黑直方图表示除随机 π 介子本底外所有本底的总和。红，洋红，绿直方图表示 $D^0 \rightarrow K_S^0 K \pi$ ， D^0 半轻衰变和 $D^0 \rightarrow K_S^0 K_S^0 / 4\pi$ 。图中的灰直方图表示不完全正确重建的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 和其他 D^0 强子衰变的总和。其余候选者用蓝直方图表示。

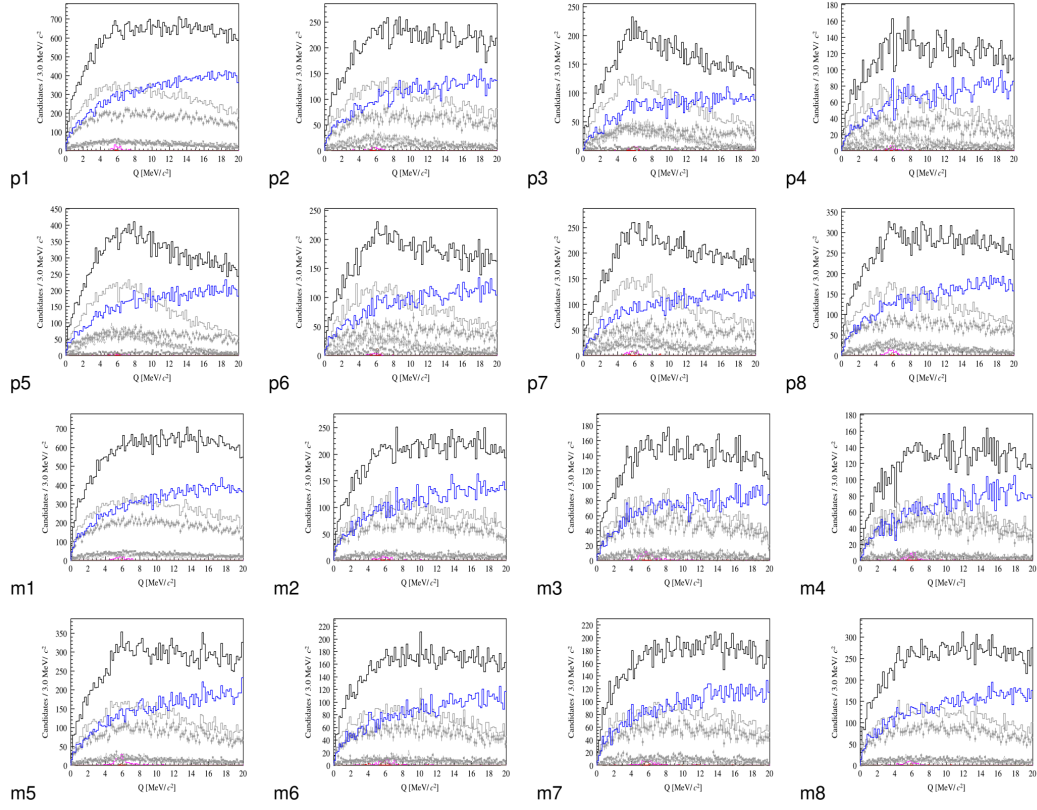
重建错误的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 候选者的峰状分布主要由运动学变量的分区导致。即，这种候选者在完整达利兹图上的 $M(D^0)$ 和 Q 分布是平滑的，在某个达利兹图区间的 $M(D^0)$ 和 Q 分布是不平滑的。图 B.11 和 B.12 对比了 generic MC 中重建错误的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 候选者的分布，和 generic MC 中信号替换候选者。两种分布形状接近。信号替换候选者的产生方法如图 B.10 所示，在 generic MC 中选出完全重建正确的信号候选者，然后用纯组合本底中的粒子替换 D^0 的某个子粒子。


 图 B.7 $+3$ 达利兹图区间的 $M(D^0)$ 和 Q 分布。

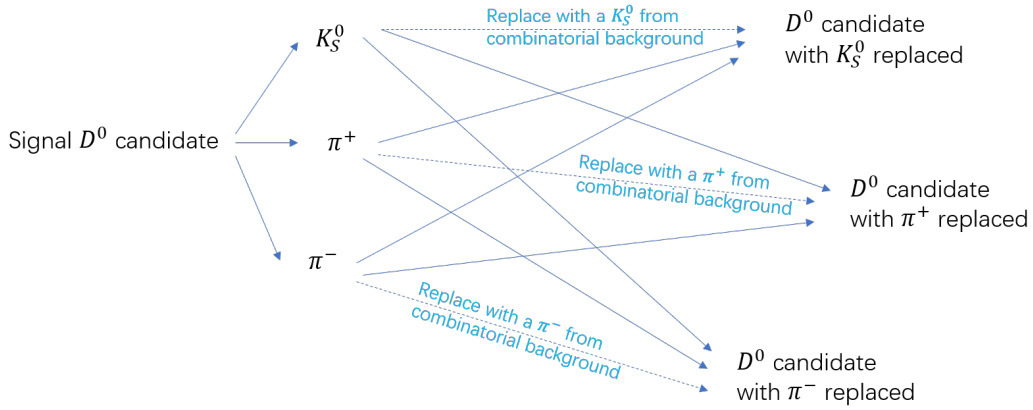
图中展示了仅 D^0 的 π^- 重建错误的候选者分布 (空心三角形), 仅 D^0 的 π^+ 重建错误的候选者分布 (实心三角形), 仅 D^0 的 K_S^0 重建错误的候选者分布 (圆形) 和其他重建错误的 D^0 信号衰变 (正方形)。黑直方图表示除随机 π 介子本底外所有本底的总和, 用红, 洋红和绿直方图表示 $D^0 \rightarrow K_S^0 K \pi$, D^0 半轻衰变和 $D^0 \rightarrow K_S^0 K_S^0 / 4\pi$ 。灰直方图表示不完全正确重建的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 和其他 D^0 强子衰变的总和。

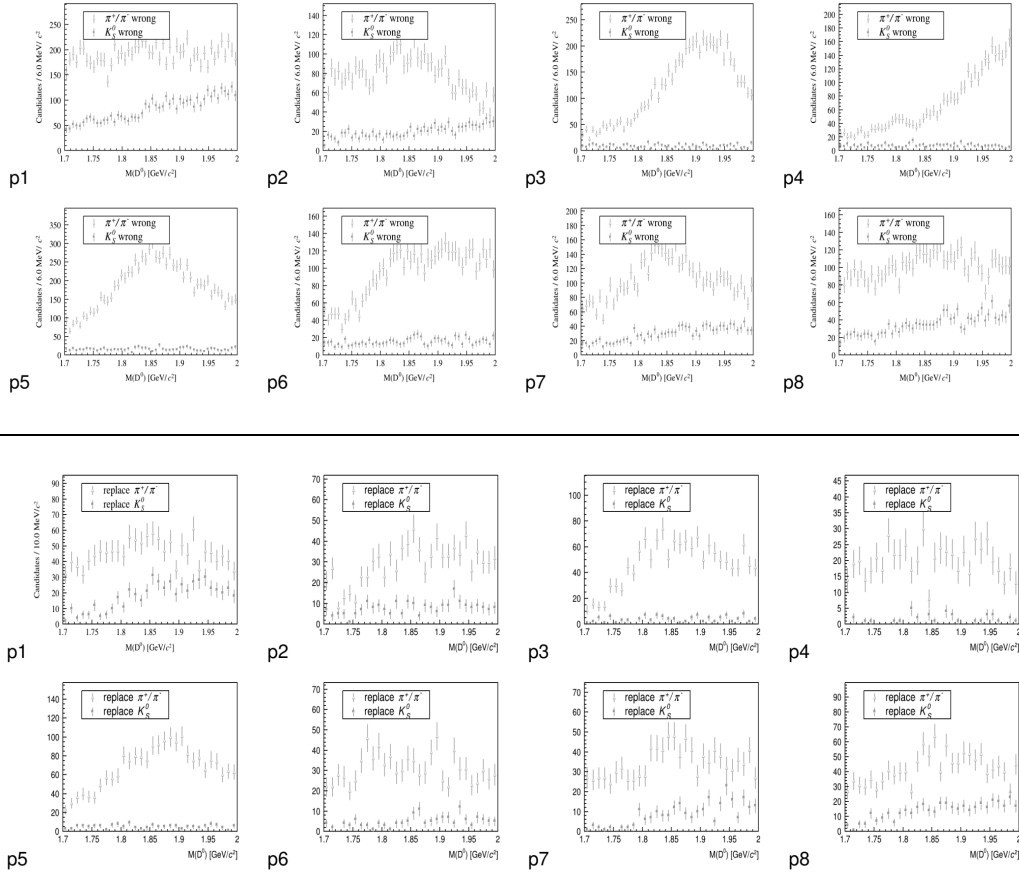

 图 B.8 达利兹图区间 $+i$ (π) 和 $-i$ (π), $i = 1, 2, \dots, 8$ 的 Q 信号区 $M(D^0)$ 分布。

各种成分的标记同图 B.7。


 图 B.9 达利兹图区间 $+i(\pi)$ 和 $-i(m)$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 的 $M(D^0)$ 信号区 Q 分布。

各种成分的标记同图 B.7。


 图 B.10 信号替换候选者的产生方法：替换完全正确重建的 D^0 候选者的 K_S^0 , π^+ 或 π^- 。


 图 B.11 $+i$ 区间不完全正确重建的信号候选者和信号替换候选者的分布对比。

顶部的 8 幅图为不完全正确重建的信号候选者的 $M(D^0)$ 分布。底部的 8 幅图为信号替换候选者的 $M(D^0)$ 分布。 p_i 表示达利兹图区间 $+i$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 。

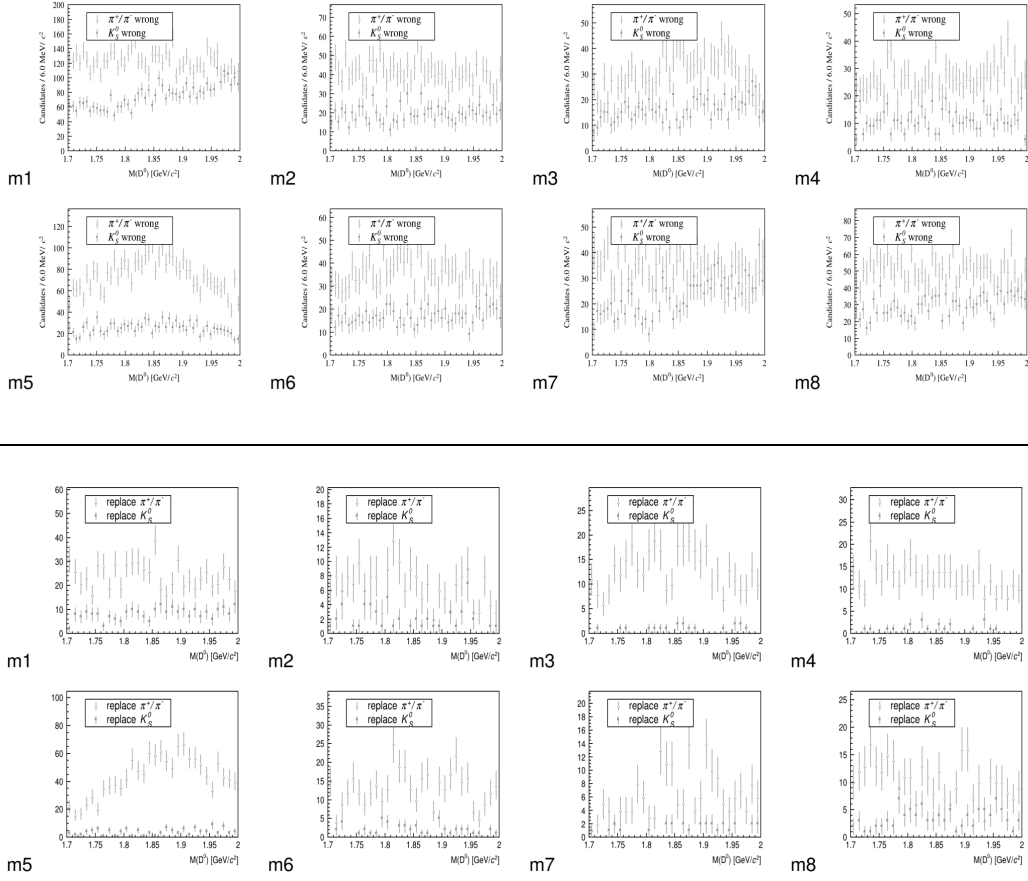


图 B.12 $-i$ 区间不完全正确重建的信号候选者和信号替换候选者的分布对比。

顶部 8 幅图为不完全正确重建的信号候选者的 $M(D^0)$ 分布。底部 8 幅图为信号替换候选者的 $M(D^0)$ 分布。 m_i 表示达利兹图区间 $-i$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 。

B.5 达利兹图分辨率的附录

B.5.1 Belle II 相空间 MC 样本

图 B.13 为 Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.14 为 Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.15 为 Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.16 为 Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

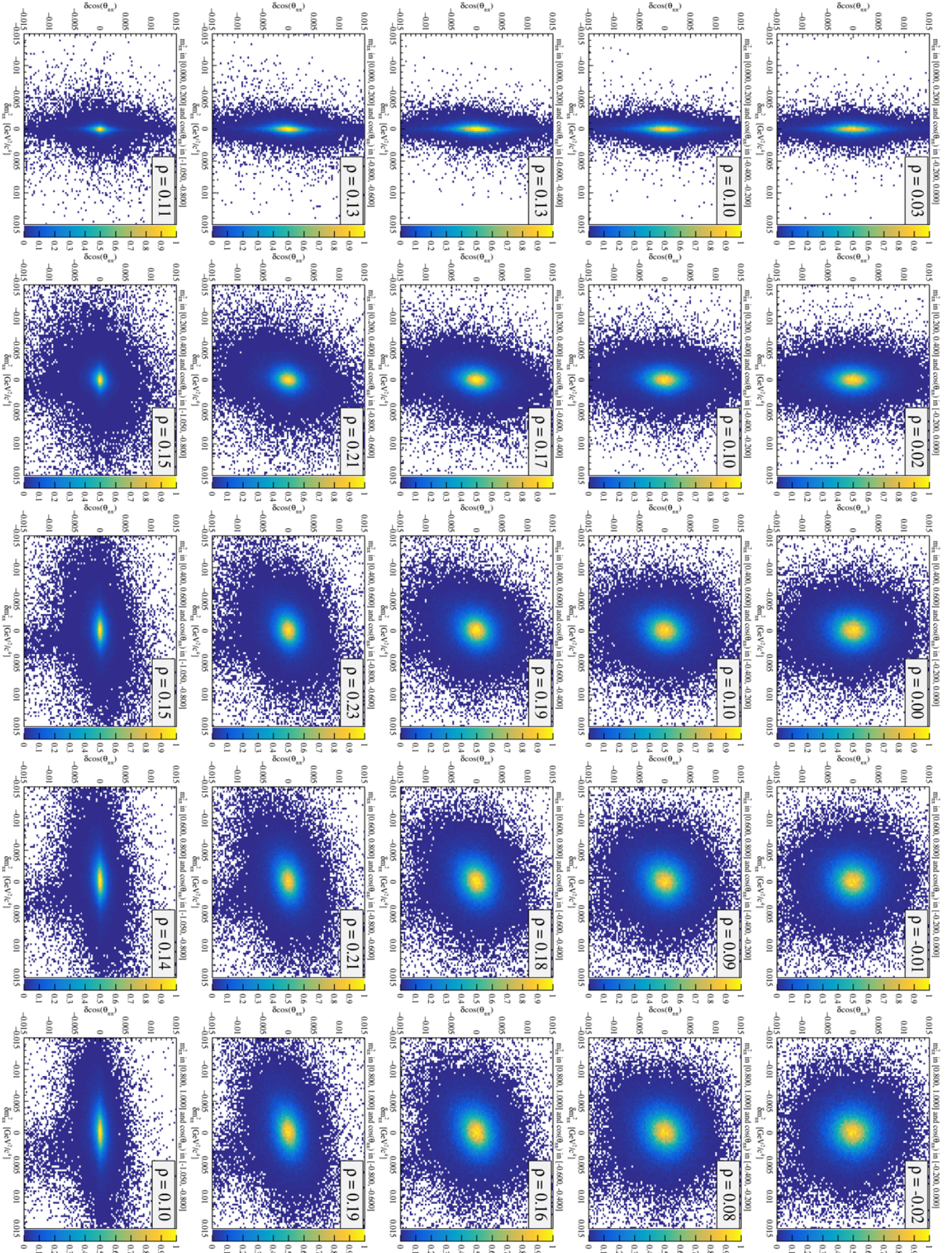


图 B.13 Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

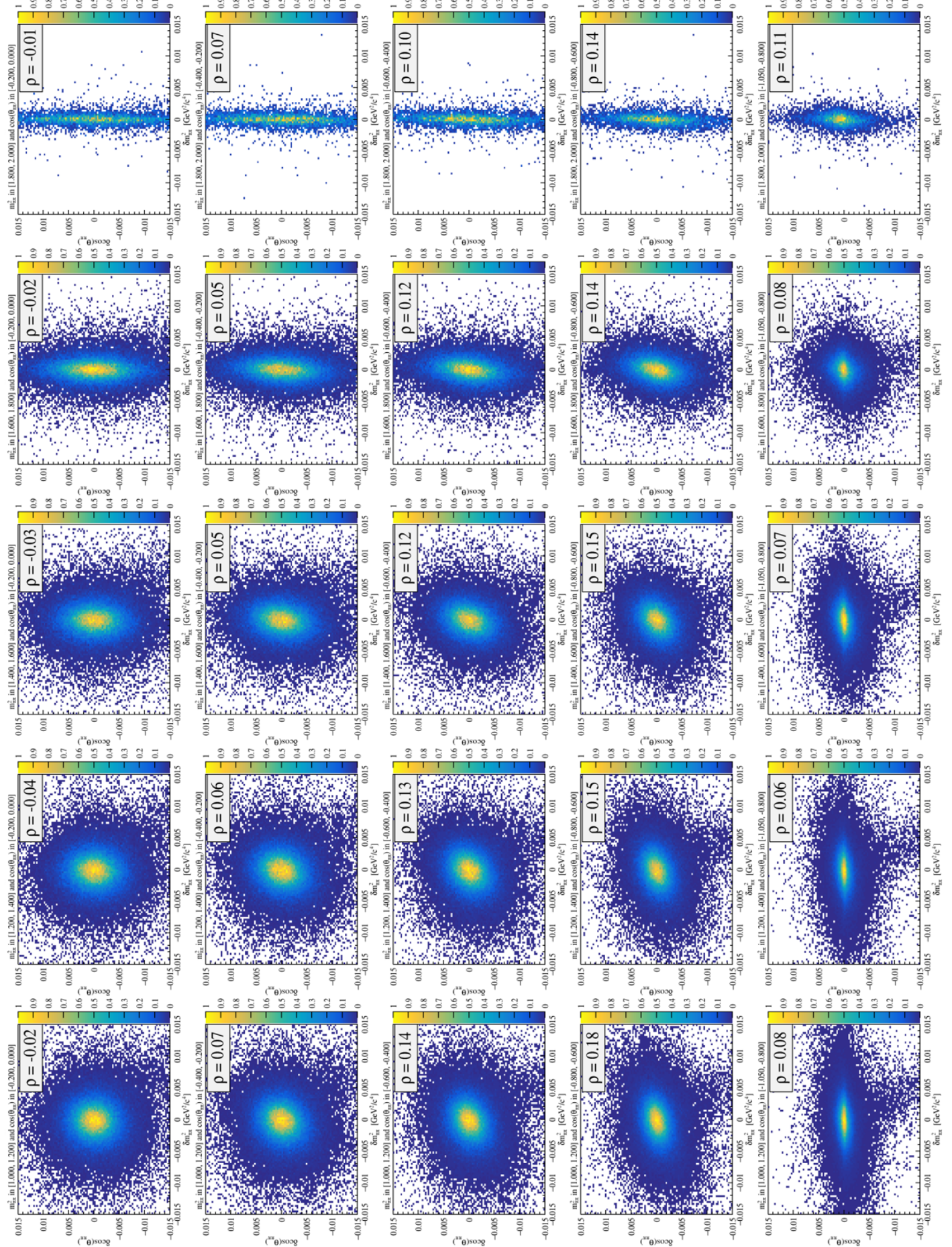


图 B.14 Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

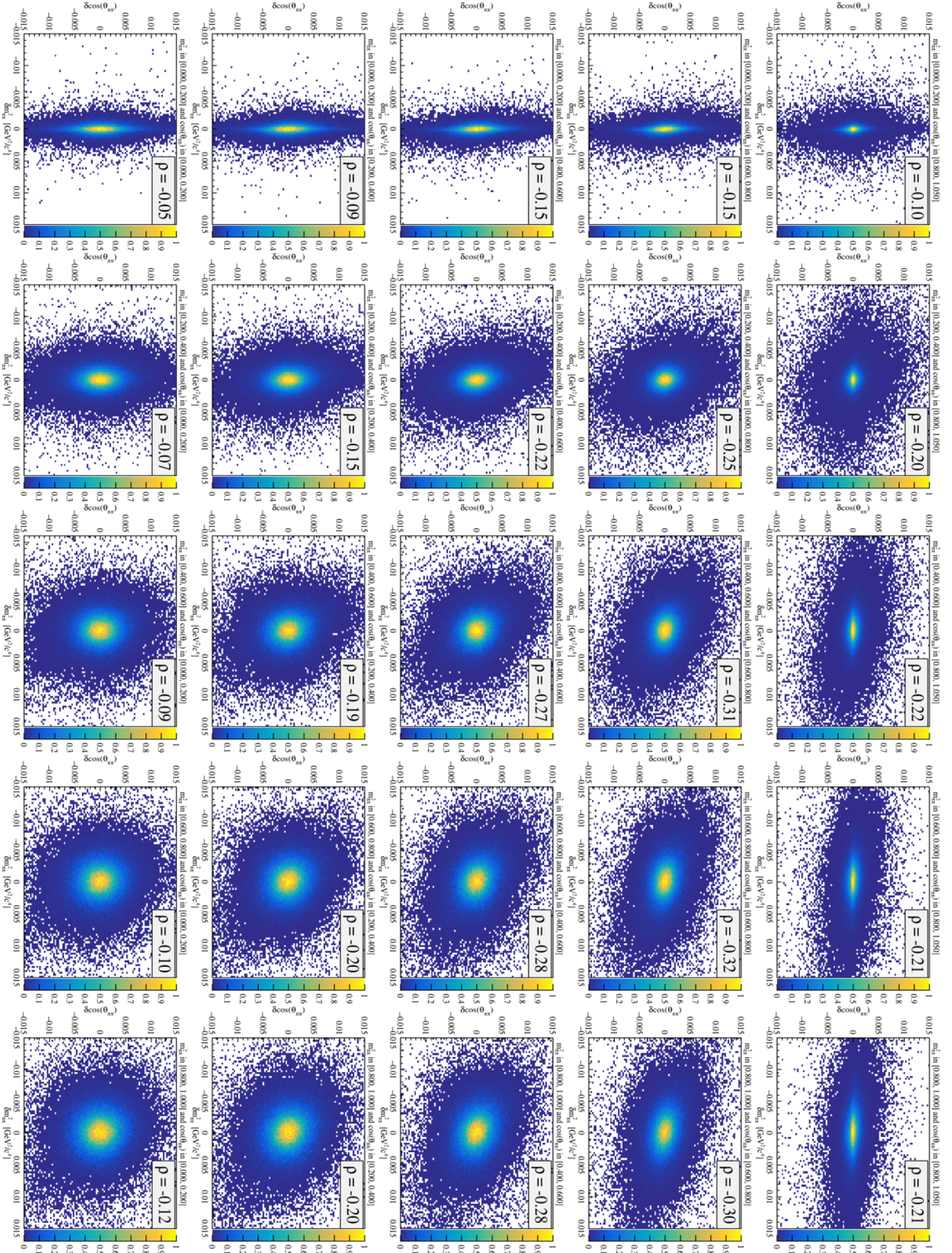


图 B.15 Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0]$ GeV²/c⁴ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

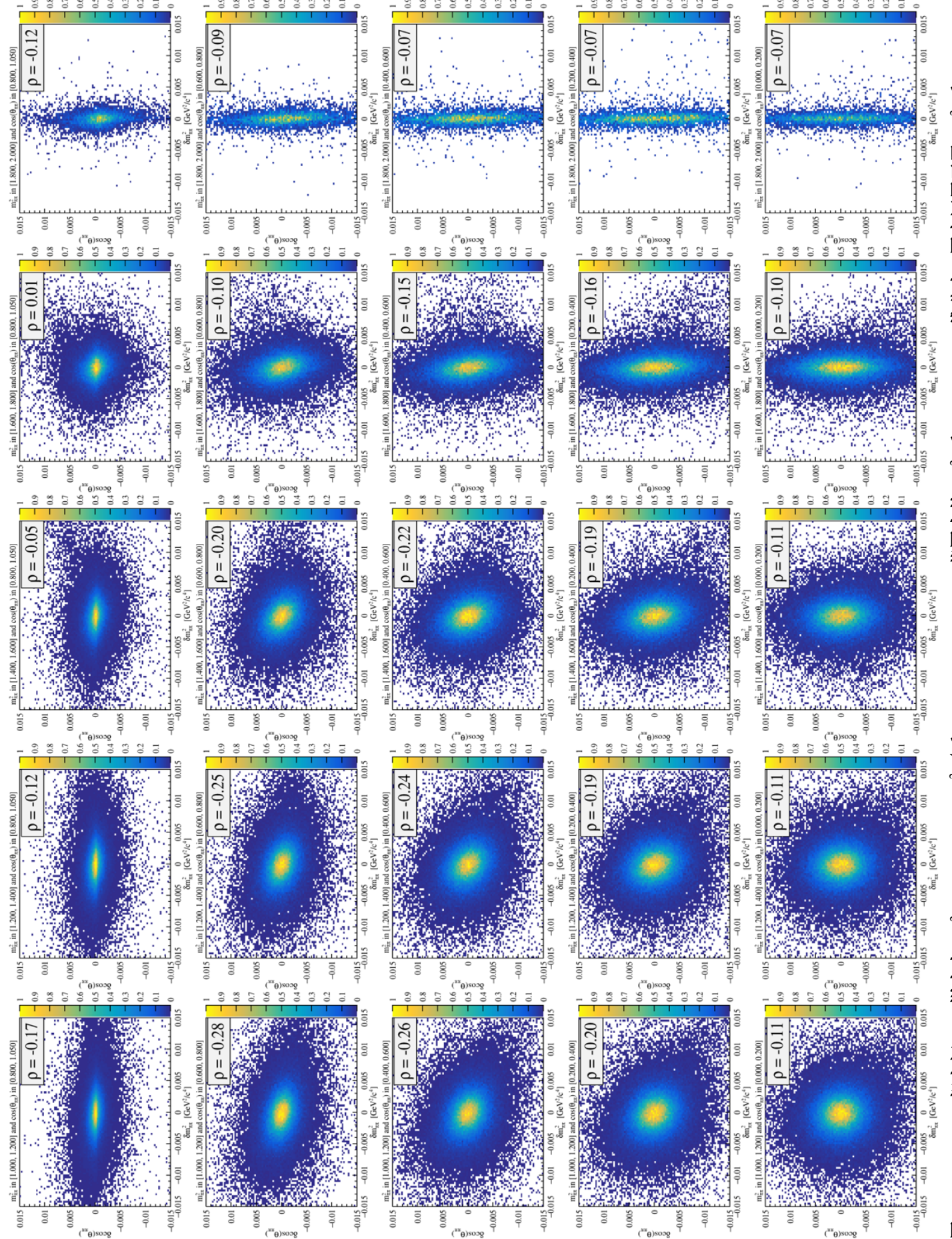


图 B.16 Belle II 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0]$ GeV²/c⁴ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

B.5.2 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本

图 B.17为 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.18为 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.19为 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.20为 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

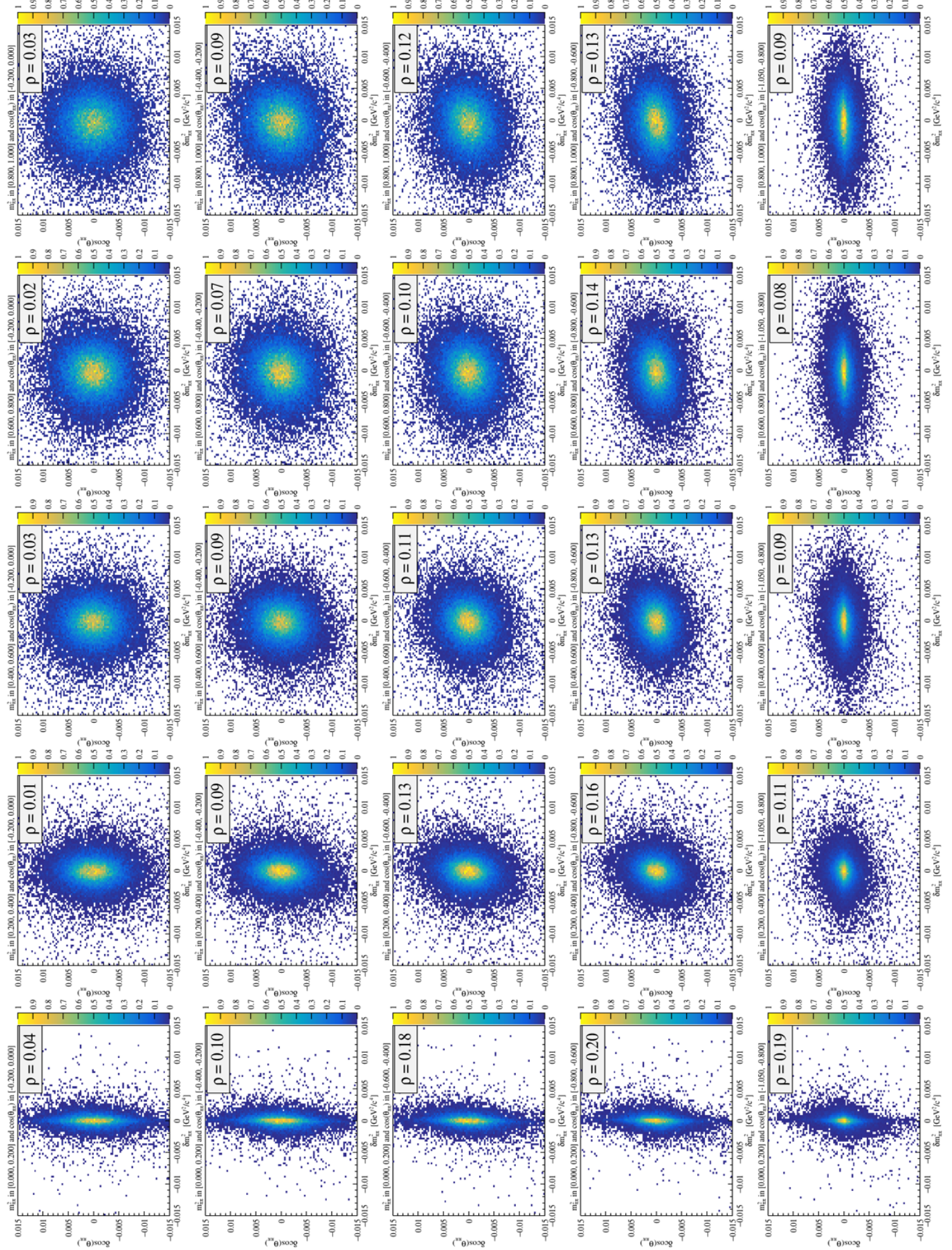


图 B.17 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0]$ GeV²/c² 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

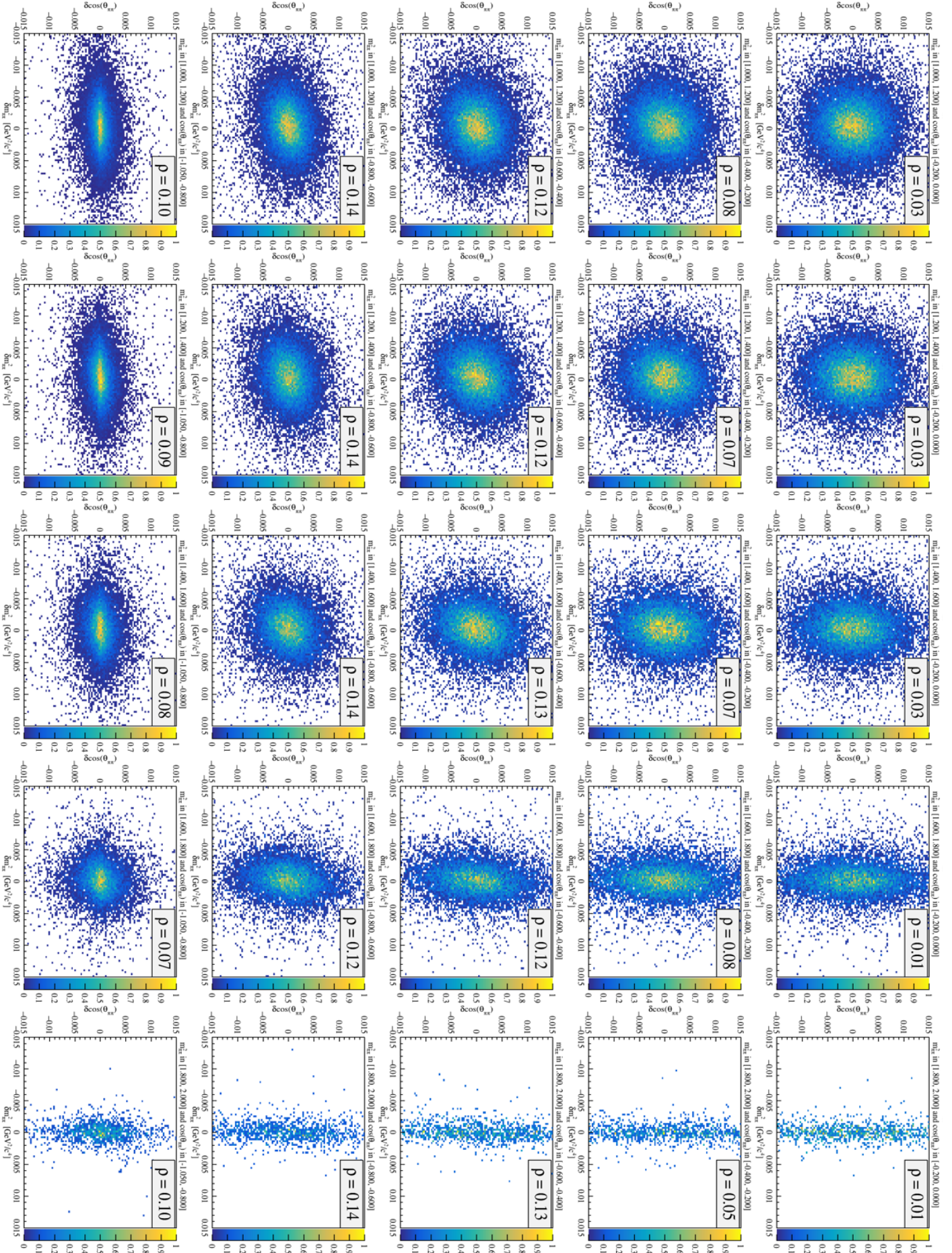


图 B.18 Belle SVD1 $\Upsilon(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

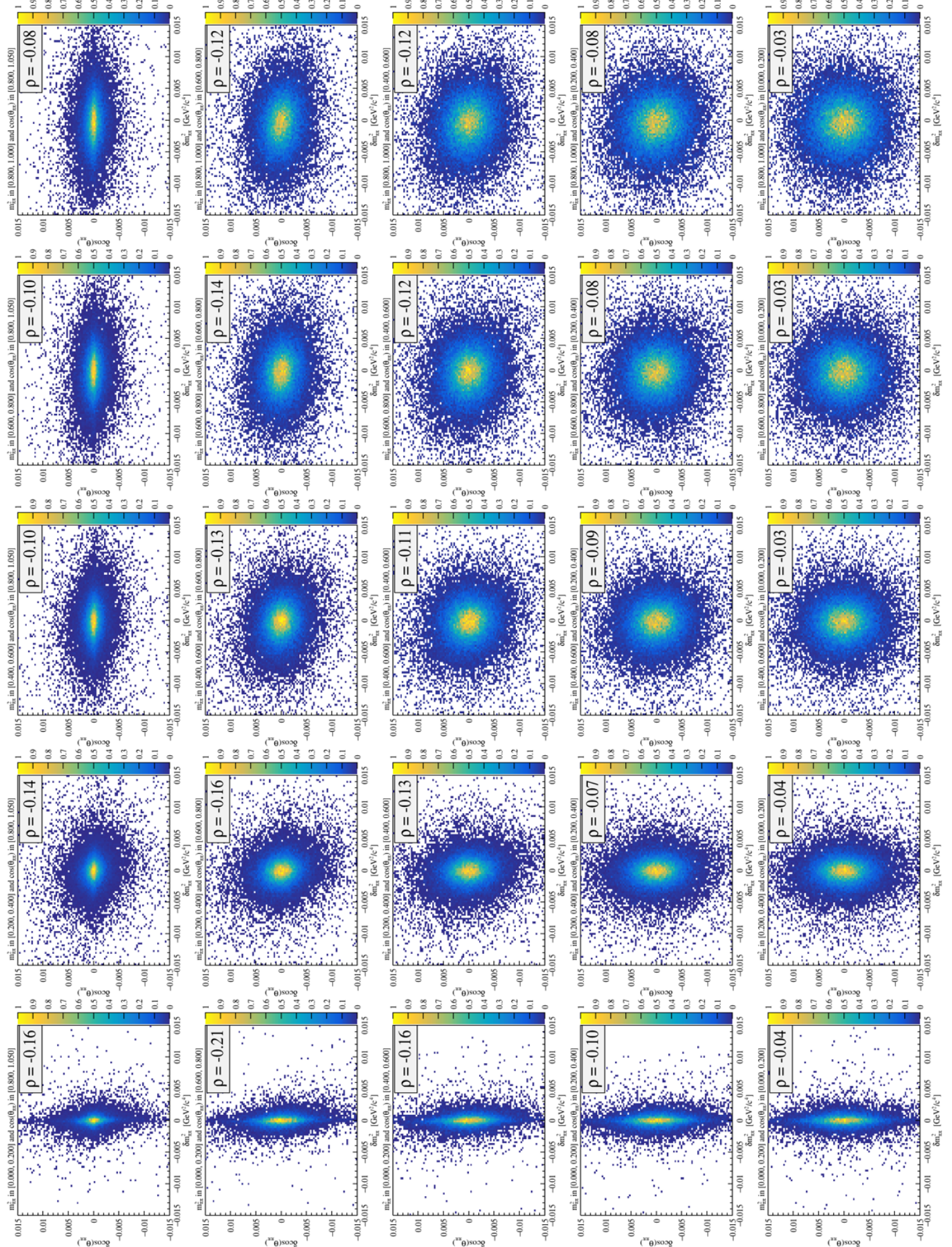


图 B.19 Belle SVD1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

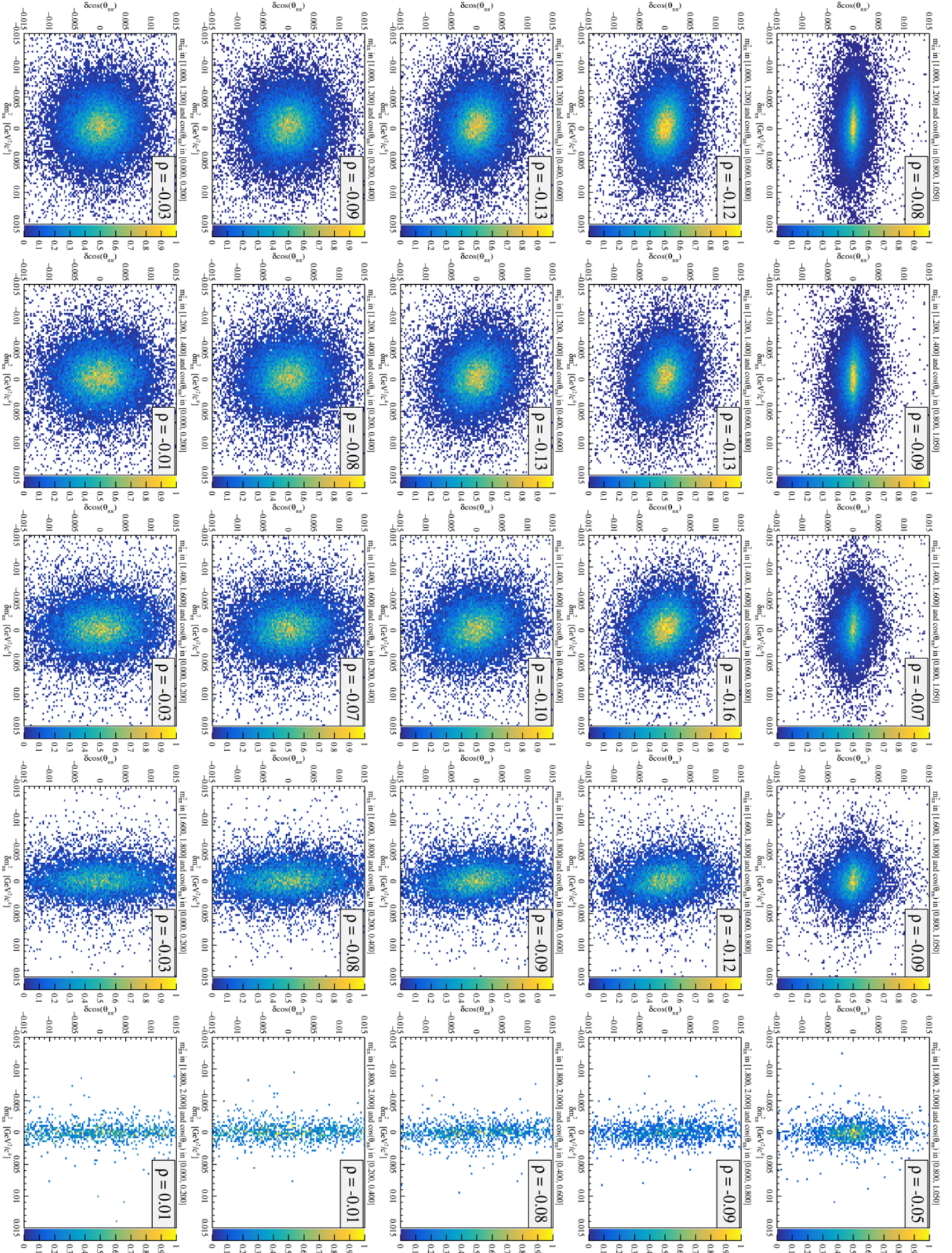


图 B.20 Belle SV1 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi^2} \in [1.0, 2.0]$ GeV/c² 和 $\cos(\theta_{\pi^0}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 δm_{π^2} 和 $\delta \cos(\theta_{\pi^0})$ 二维分布。图中还展示了 δm_{π^2} 和 $\delta \cos(\theta_{\pi^0})$ 的相关系数 (ρ)。

B.5.3 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本

图 B.21 为 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.22 为 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.23 为 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.24 为 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

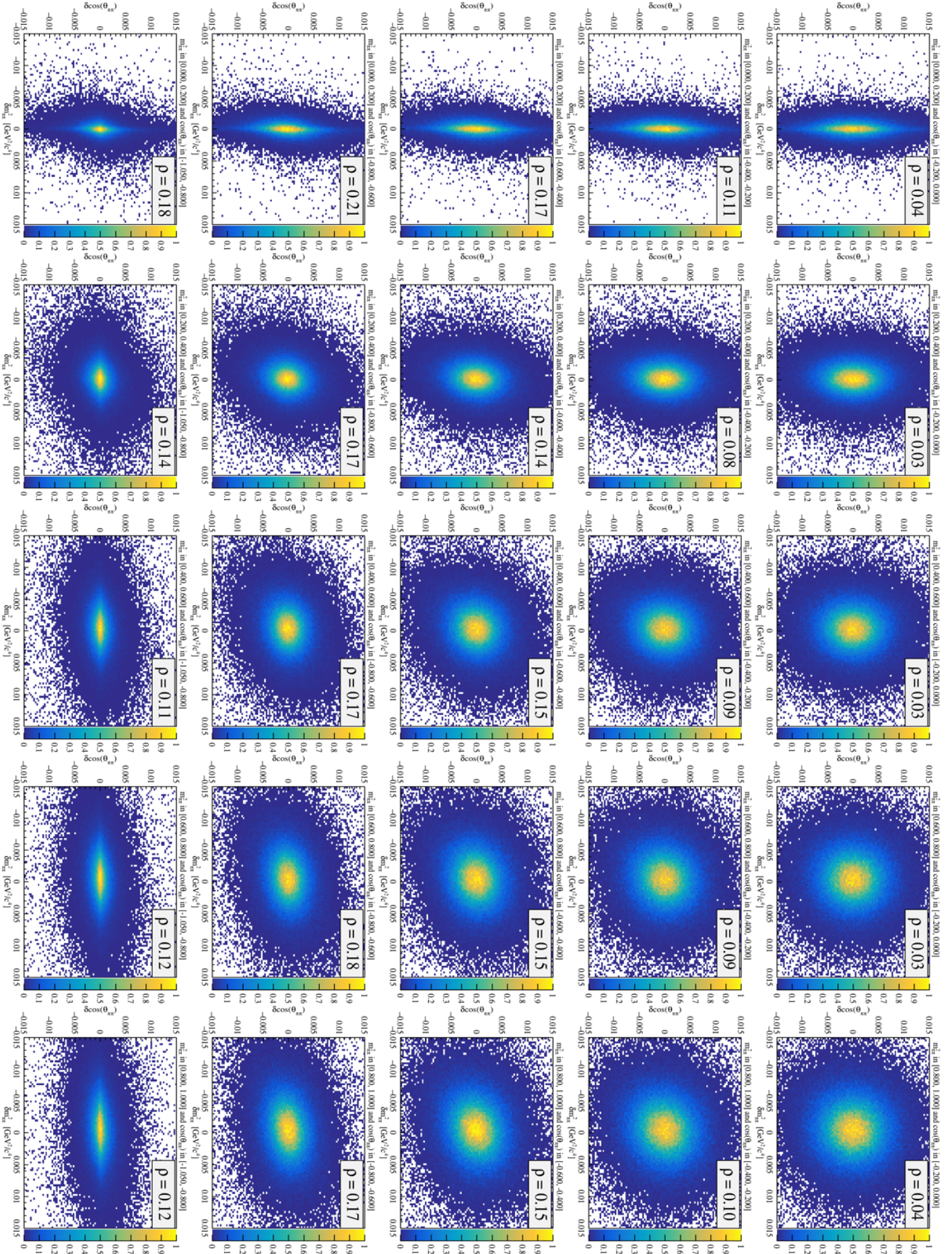


图 B.21 Belle SVD2 $\Upsilon(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0]$ GeV²/c⁴ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

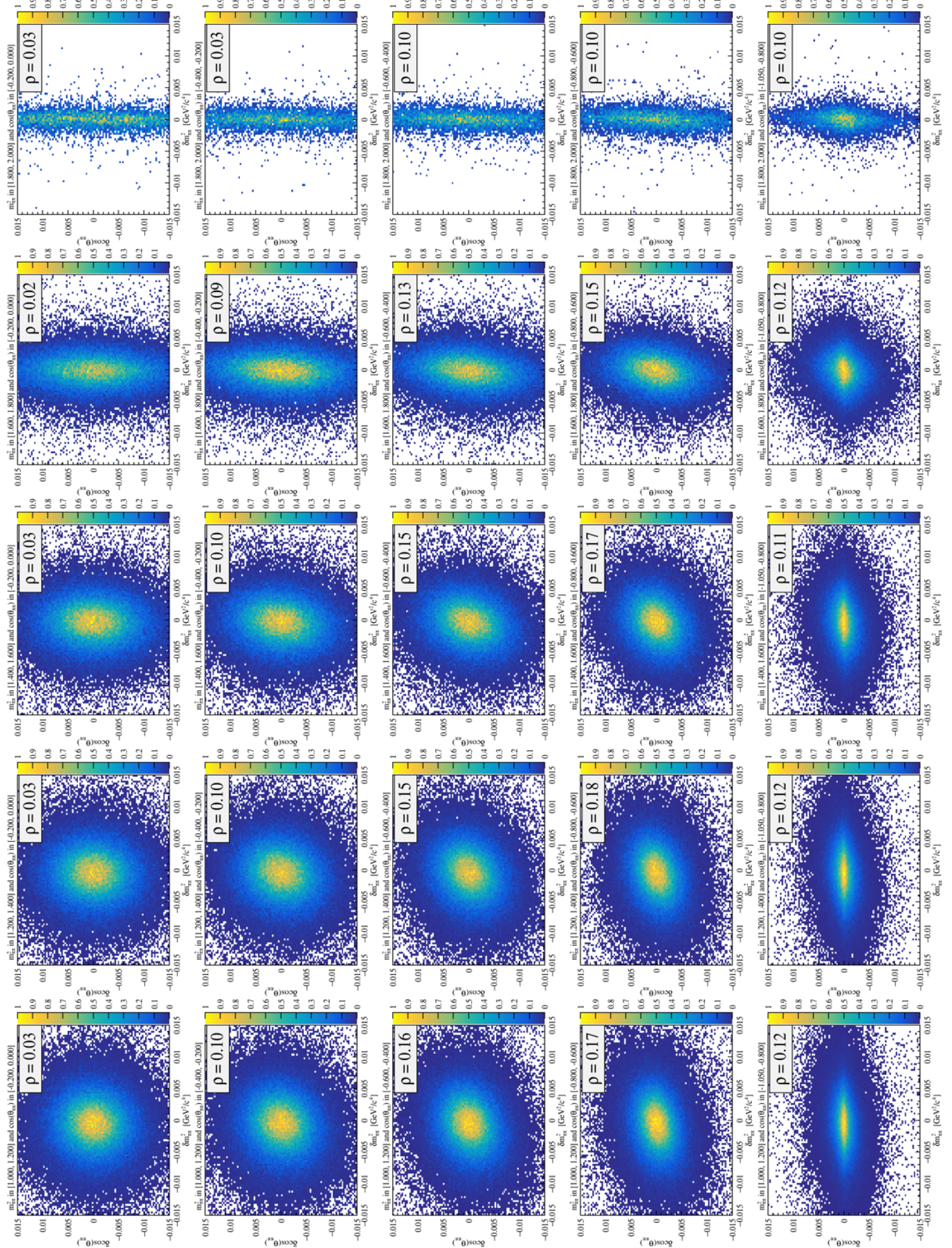


图 B.22 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

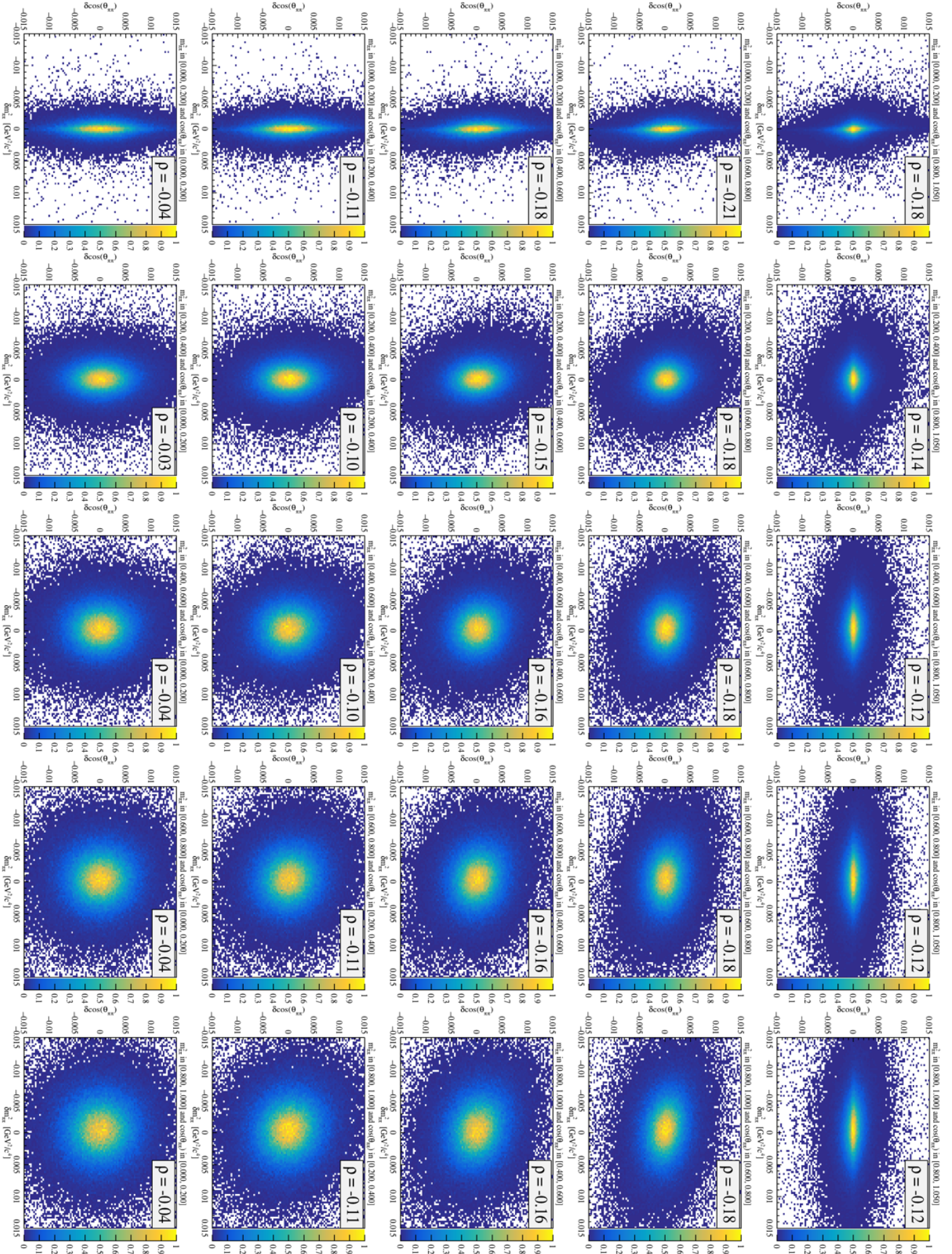


图 B.23 Belle SVD2 $\Upsilon(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m^2_{\pi\pi} \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m^2_{\pi\pi}$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m^2_{\pi\pi}$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

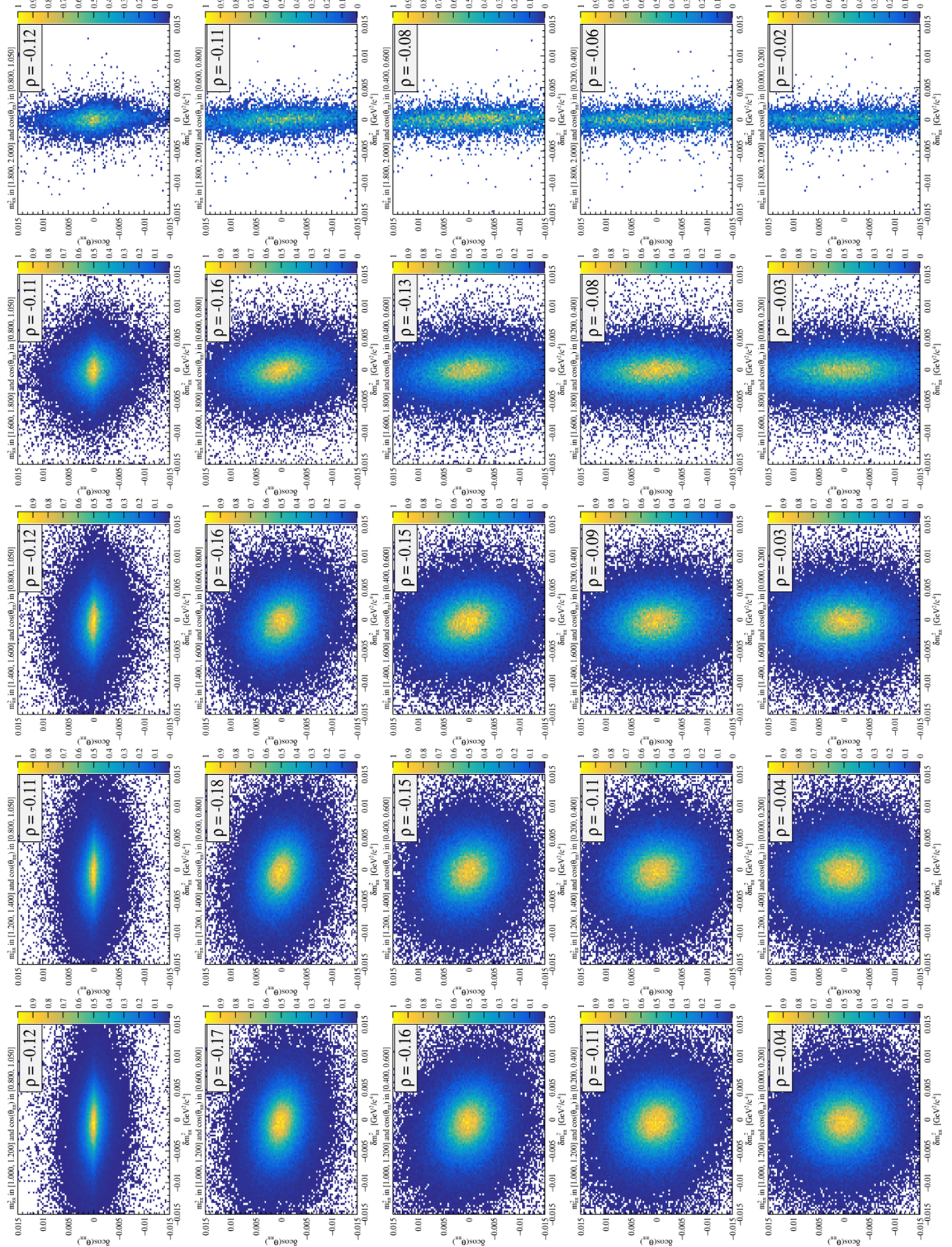


图 B.24 Belle SVD2 $Y(4S)$ 相空间 MC 样本中, $m^2_{\pi\pi} \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 $\delta m^2_{\pi\pi}$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m^2_{\pi\pi}$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

B.5.4 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本

图 B.25 为 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.26 为 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.27 为 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

图 B.28 为 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。

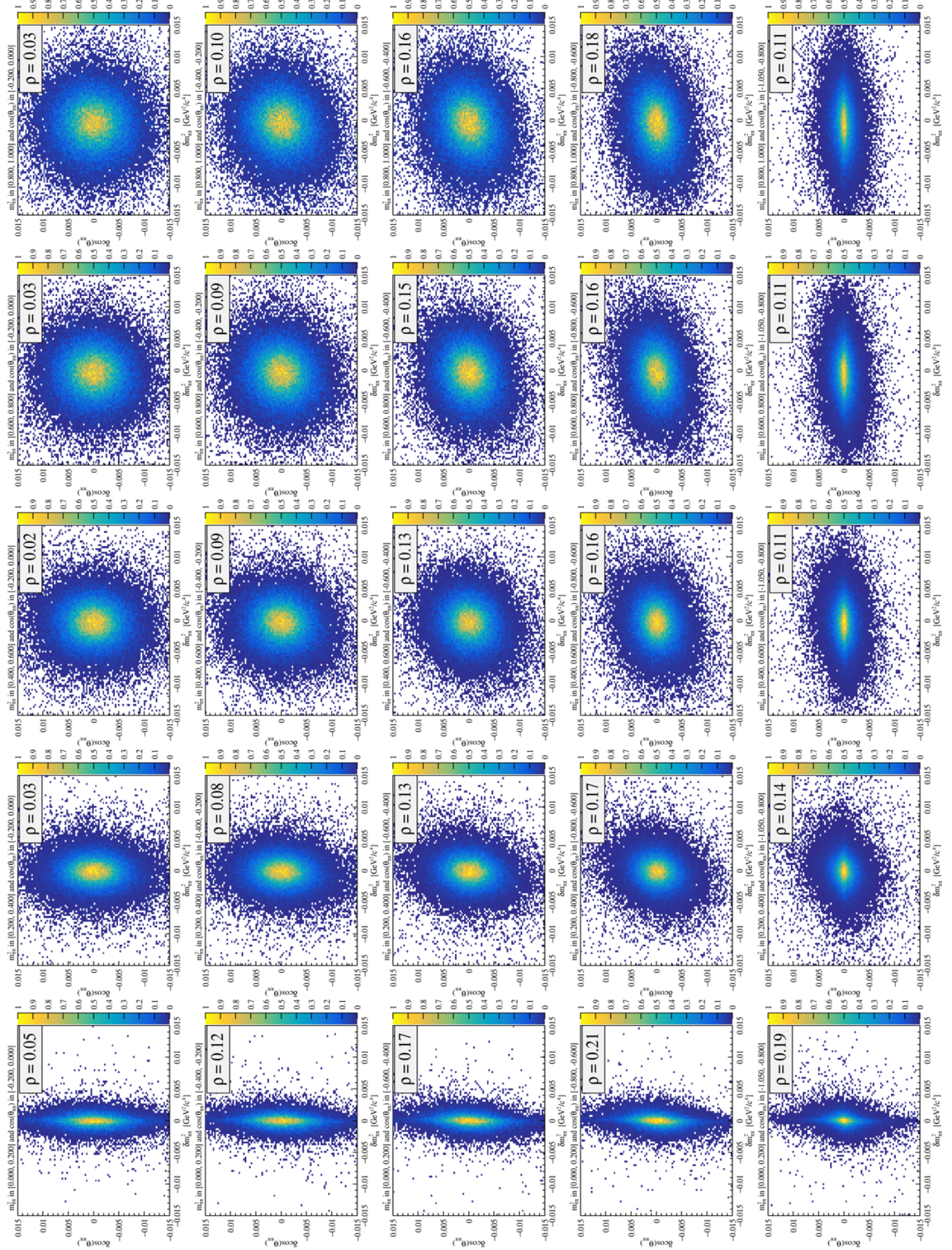


图 B.25 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

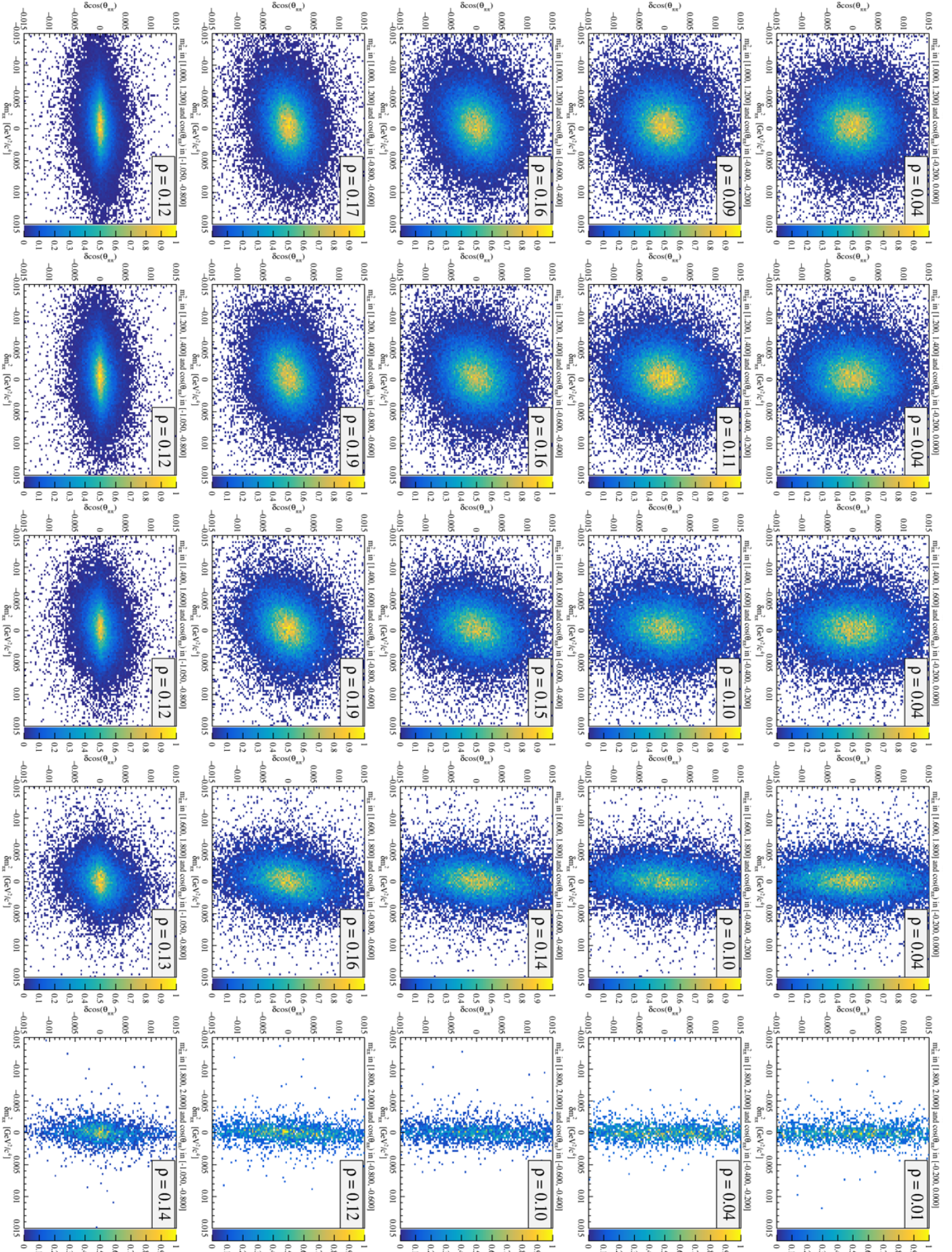


图 B.26 Belle SVD2 $\Upsilon(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0]$ GeV²/c² 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [-1.0, 0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

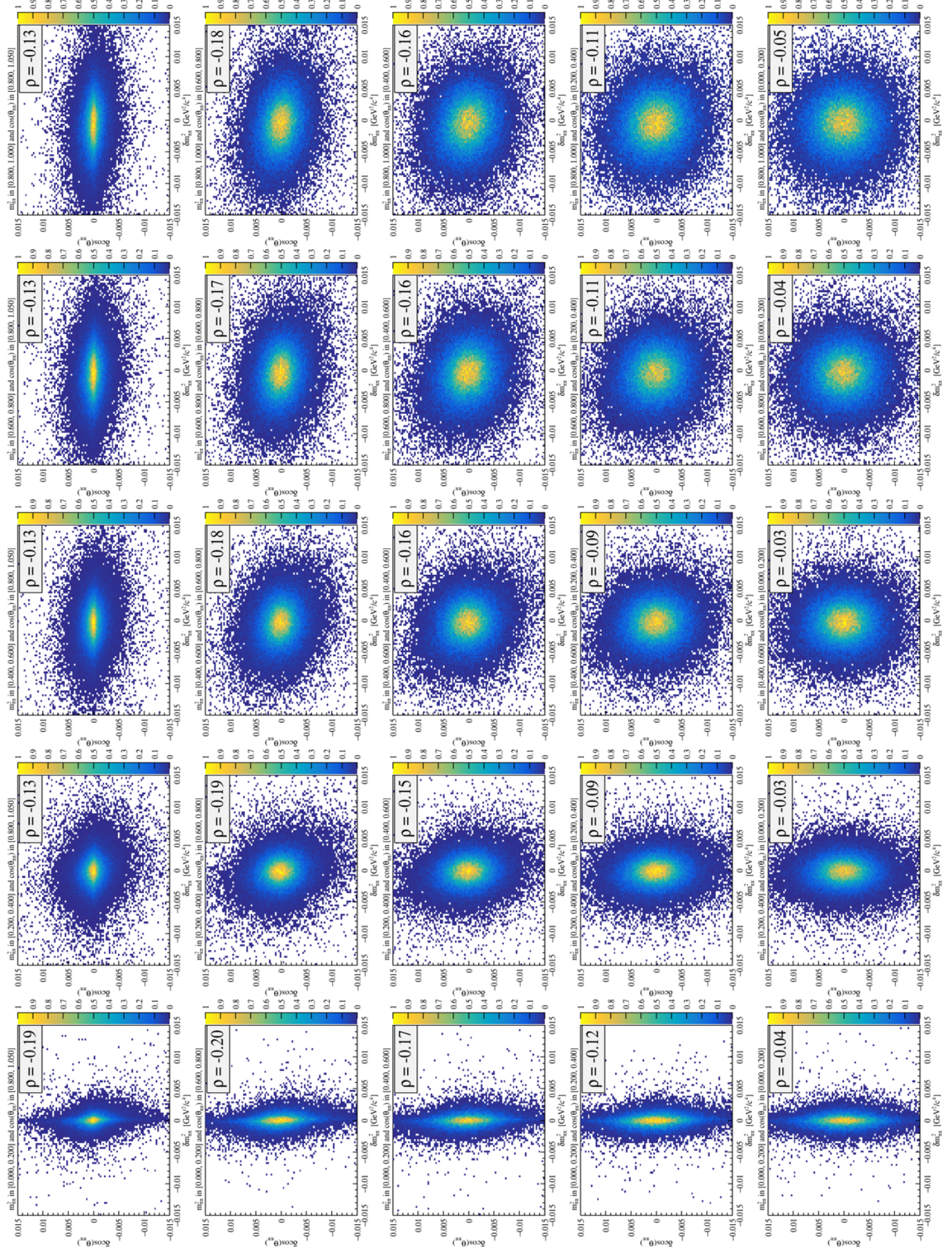


图 B.27 Belle SVD2 $Y(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [0.0, 1.0] \text{ GeV}^2/c^4$ 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 5×5 等分区间的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

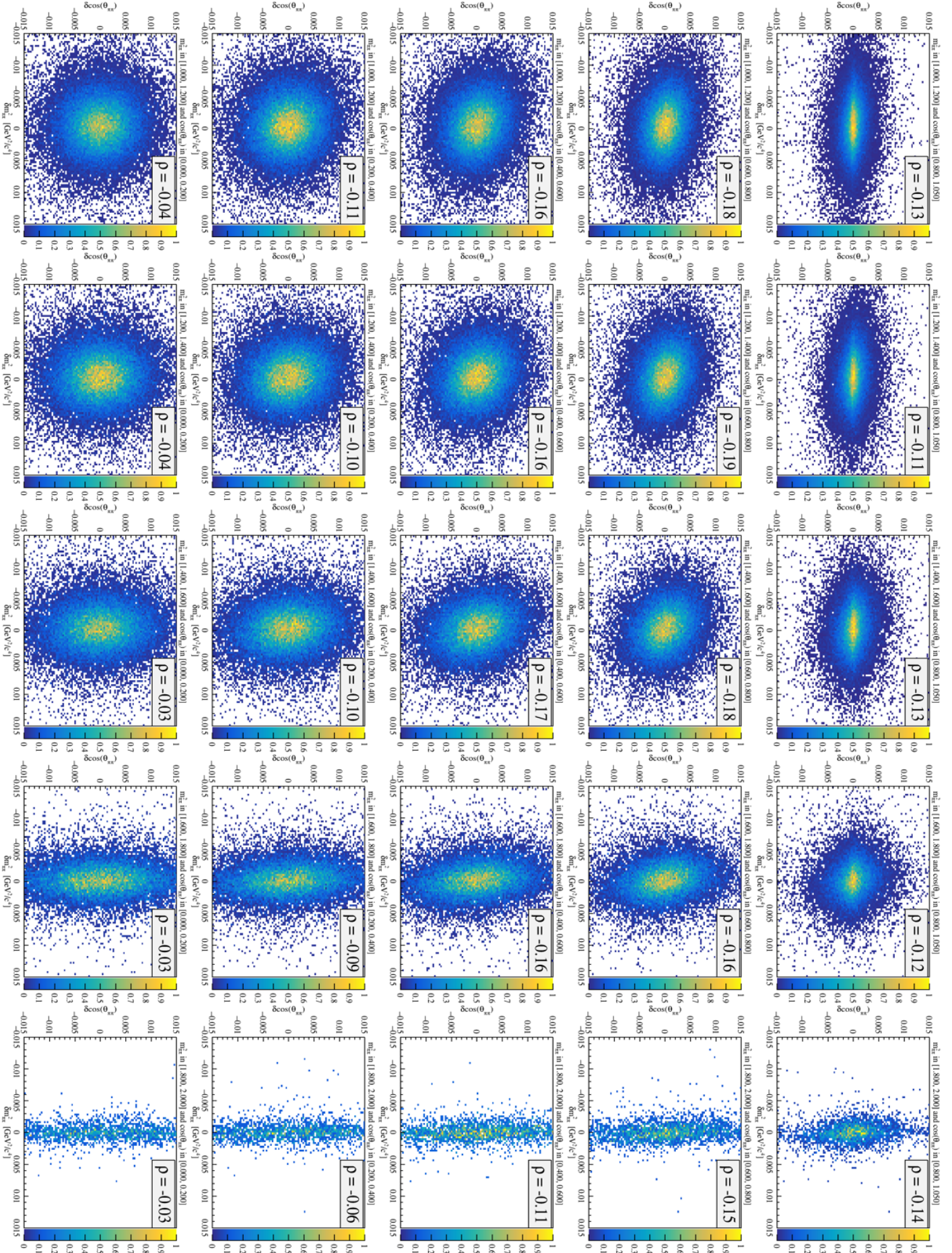


图 B.28 Belle SVD2 $\gamma(5S)$ 相空间 MC 样本中, $m_{\pi\pi}^2 \in [1.0, 2.0]$ GeV^2/c^4 和 $\cos(\theta_{\pi\pi}) \in [0.0, 1.0]$ 范围内的 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 二维分布。图中还展示了 $\delta m_{\pi\pi}^2$ 和 $\delta \cos(\theta_{\pi\pi})$ 的相关系数 (ρ)。

B.6 不同达利兹图区间的 D^0 衰变时间和 σ_t 分布

本章节基于 Belle II MC15 的相空间信号 MC 和 generic MC 研究了信号和本底在不同达利兹图区间的 D^0 衰变时间和 σ_t 分布。

B.6.1 不同达利兹图区间的信号 σ_t 分布和其他本底 σ_t 分布

图 B.29 为相空间信号 MC 中信号候选者的 σ_t 分布。黑直方图是全达利兹图的 σ_t 分布, 红直方图和蓝直方图是达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$ 的 σ_t 分布, $i = 1, 2, \dots, 8$ 。图中直方图根据最大值归一化。由图, 信号候选者的 σ_t 分布随达利兹区间变化。 $+i$ 和 $-i$ 区间的 σ_t 分布一致。图 B.30 为 generic MC 中的其他本底候选者的 σ_t 分布。标记与图 B.29 类似。由图, 其他本底选者的 σ_t 分布随达利兹区间变化。 $+i$ 和 $-i$ 区间的 σ_t 分布稍有差别。本工作忽略 $+i$ 和 $-i$ 区间的差别。

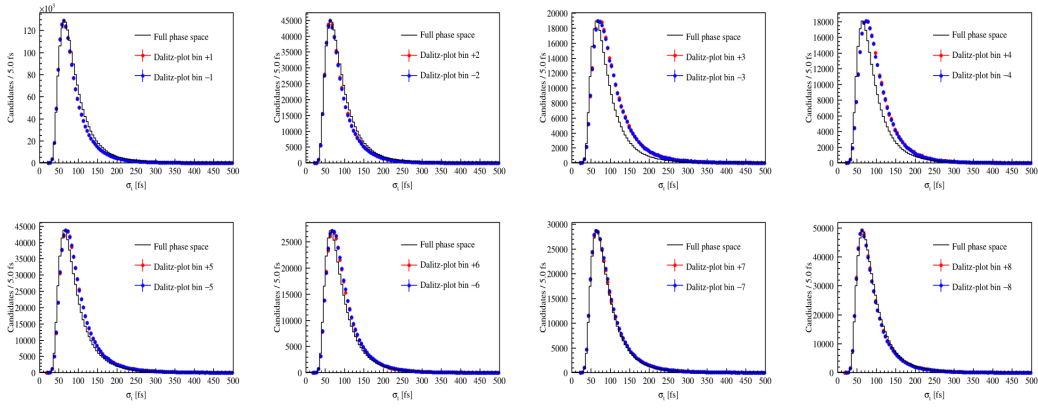


图 B.29 相空间信号 MC 中信号候选者的 σ_t 分布。

黑直方图是全达利兹图的 σ_t 分布, 红直方图和蓝直方图是达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 σ_t 分布, $i = 1, 2, \dots, 8$ 。图中直方图根据最大值归一化。

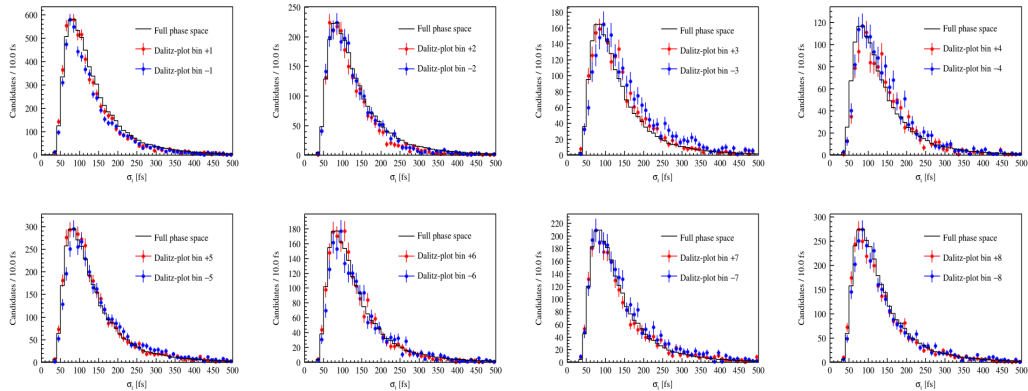


图 B.30 Generic MC 中其他本底候选者的 σ_t 分布。

黑直方图是全达利兹图的 σ_t 分布, 红直方图和蓝直方图是达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 σ_t 分布, $i = 1, 2, \dots, 8$ 。图中直方图根据最大值归一化。

B.6.2 不同达利兹图区间的 $\delta t/\sigma_t$ 分布

图 B.31 为相空间信号 MC 中信号候选者的 $\delta t/\sigma_t$ 分布。黑直方图是全达利兹图的 $\delta t/\sigma_t$ 分布，红直方图和蓝直方图是达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $\delta t/\sigma_t$ 分布， $i = 1, 2, \dots, 8$ 。图中直方图根据最大值归一化。由图，不同达利兹图区间的 $\delta t/\sigma_t$ 分布一致。

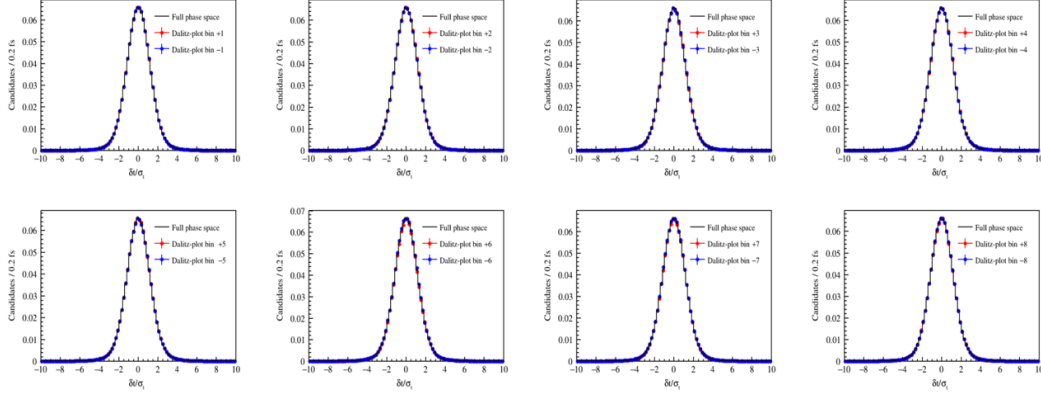


图 B.31 相空间信号 MC 中信号候选者的 $\delta t/\sigma_t$ 分布。

黑直方图是全达利兹图的 $\delta t/\sigma_t$ 分布，红直方图和蓝直方图是达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $\delta t/\sigma_t$ 分布， $i = 1, 2, \dots, 8$ 。

B.6.3 不同达利兹图区间其他本底候选者的 D^0 衰变时间分布

图 B.32 为不同达利兹图区间其他本底候选者的 D^0 衰变时间分布。标记与图 B.30 类似。由图，其他本底候选者的 D^0 衰变时间分布随达利兹图区间变化。 $+i$ 和 $-i$ 区间的分布稍有差别。

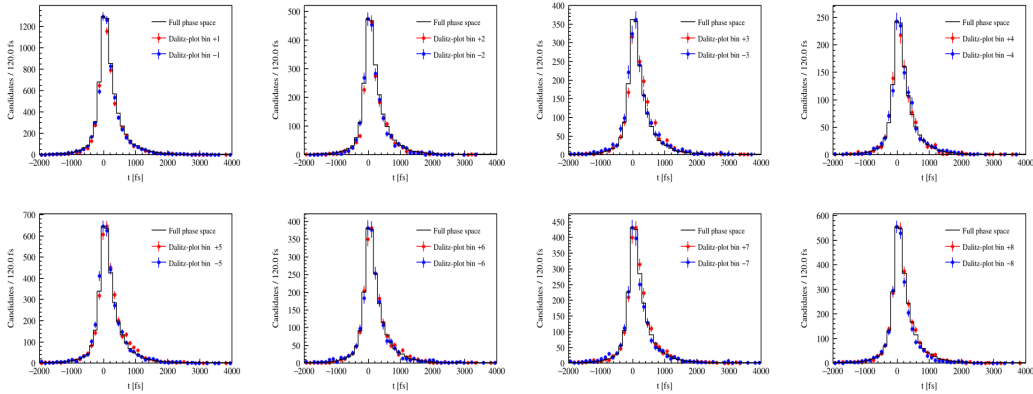


图 B.32 Generic MC 中其他本底候选者的 D^0 衰变时间分布。

黑直方图是全达利兹图的 D^0 衰变时间分布，红直方图和蓝直方图是达利兹图区间 $+i$ 和 $-i$ 的 D^0 衰变时间分布， $i = 1, 2, \dots, 8$ 。图中直方图根据最大值归一化。

B.6.4 其他本底候选者在信号区间和 $M(D^0)$ 边带的 D^0 衰变时间分布和 σ_t 分布。

图 B.34和图 B.34对比了 generic MC 中其他本底候选者在信号区间和 $M(D^0)$ 边带的 σ_t 分布。点为边带区间的分布，直方图为信号区间的分布。在不同达利兹图区间分别进行对比。可见，信号区间的分布和 $M(D^0)$ 边带的分布不完全一致。在系统误差中考虑其影响。

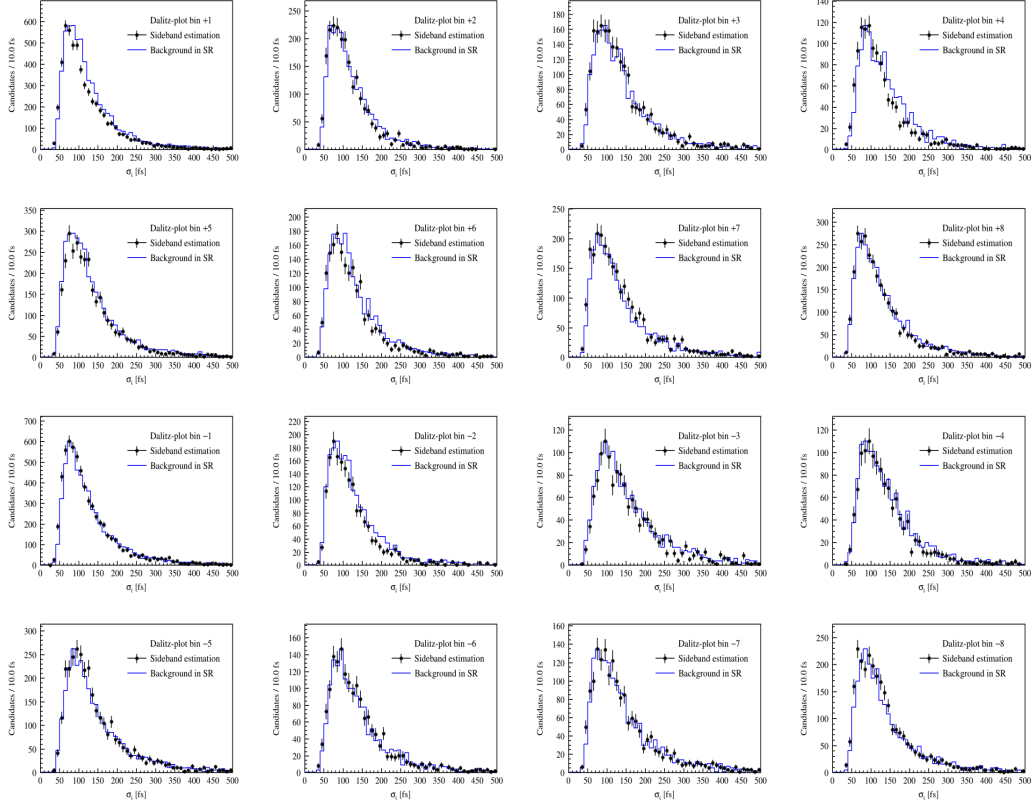


图 B.33 Generic MC 中不同达利兹图区间的其他本底候选者在信号区间 (点) 和 $M(D^0)$ 边带 (直方图) 的 D^0 衰变时间分布。

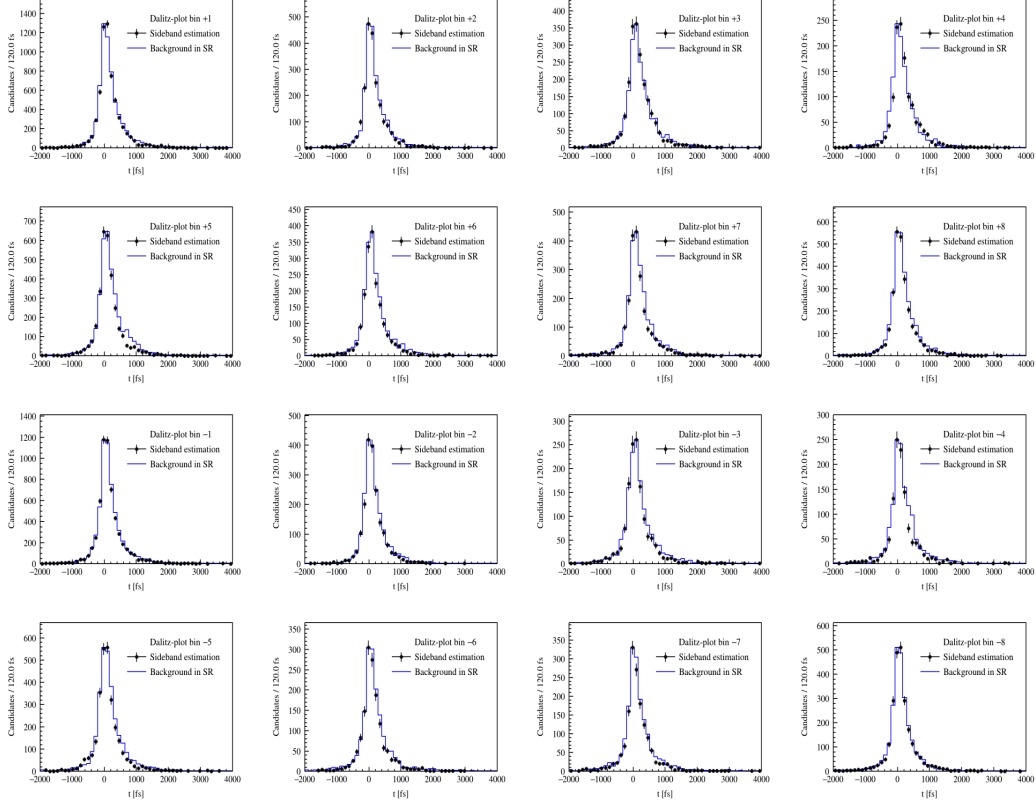


图 B.34 Generic MC 中不同达利兹图区间的其他本底候选者在信号区间 (点) 和 $M(D^0)$ 边带 (直方图) 的 σ_t 分布。

B.7 混合参数统计误差的研究

章节 6 的拟合结果中, 单位统计量的 Belle 和 Belle II 数据的 x 参数统计误差不同。其主要原因是 Belle 和 Belle II 的时间分辨率不同。以下将展开说明。

基于 Belle SVD2 (Belle II) 时间分辨率产生 Toy MC 样本, 每个样本的统计量为 Belle SVD2 $Y(4S)$ (Belle II) 数据的 1.1 倍。对 Toy MC 样本进行四种拟合^①:

- 拟合仅包含信号的 Toy MC。浮动混合参数和时间分辨的参数。固定 r_b , c_b 和 s_b 。
- 拟合仅包含信号的 Toy MC。浮动混合参数, 时间分辨的参数和 r_b 。固定 c_b 和 s_b 。
- 拟合仅包含信号的 Toy MC。浮动混合参数, 时间分辨的参数, r_b , c_b 和 s_b 。
- 拟合仅包含信号和本底的 Toy MC。浮动混合参数, 时间分辨的参数, r_b , c_b 和 s_b 。

拟合得到的 x 参数统计误差如表 B.1 所示。最右列将 Belle II Toy MC 拟合结果按照变换到 Belle 统计量下^②, 以进行直接对比。可见 Belle II 分辨率的 Toy MC 的

^① 此处进行四种拟合是为了研究在不同情况下, 时间分辨对混合参数统计误差的影响。

^② 即将 Belle II 的 σ_x 乘以 Belle II Toy MC 统计量和 Belle SVD2 Toy MC 统计量的比例的平方根。

拟合误差比 Belle SVD2 分辨率的 Toy MC 小 5%-13%。

表中的最后一行的拟合方式，与对实验数据的拟合相同，在 Toy MC 拟合中得到的统计误差与 Belle (Belle II) 实验数据一致。

此外，通过对比不同条件的 Toy MC 拟合结果发现，浮动 r_b , c_b 和 s_b 会增加两种 Toy MC 的拟合误差的差距。根据表 B.1，浮动 r_b 后，Belle 和 Belle II 的差距增加了约 6%。浮动 c_b 和 s_b 及加入本底，共使得差距增加约 3%。对模型依赖方法，也有类似的结论。使用 DAFNE 框架基于 BaBar^[39,186]，Belle SVD2 和 Belle II 的时间分辨分别产生约 1.0×10^6 个事例的 Toy MC。使用 DAFNE 框架对其进行含时达利兹图分析。拟合分成两种。第一种拟合仅浮动混合参数和时间分辨参数。第二种拟合在第一种拟合的基础上额外浮动 12 个达利兹图振幅的复数参数。两种拟合的结果如表 B.3 所示。由表 B.3，浮动达利兹图振幅之前三种 Toy MC 对 x 参数的统计误差非常接近。浮动达利兹图振幅后，三种 Toy MC 对 x 参数的统计误差的差距变大。

由上述对比可知，分辨率的改善会提高 x 参数的敏感度。在模型无关方法中浮动 r_b , c_b 和 s_b 或者在模型依赖方法中浮动达利兹图后，分辨率改善带来的 x 参数敏感度的提升会更加明显。

	Belle SVD2 4S MC ($N_{\text{sig}} \sim 1.07\text{M}$) $\sigma_x [10^{-3}]$	Belle II MC ($N_{\text{sig}} \sim 0.75\text{M}$) $\sigma_x [10^{-3}]$	Belle II MC σ_x scale to Belle SVD2 4S MC statistics $[10^{-3}]$
signal only (fix r_b , fix c_b , s_b)	1.49	1.69	1.41
signal only (float r_b , fix c_b , s_b)	2.26	2.42	2.02
signal only (float r_b , float c_b , s_b)	2.34	2.47	2.06
signal and background (float r_b , float c_b , s_b)	2.46	2.55	2.13

表 B.1 拟合 Belle SVD2 和 Belle II Toy MC 得到的 x 参数统计误差。

最右列将 Belle II Toy MC 拟合结果变换到 Belle Toy MC 统计量下。

	Belle SVD2 4S MC ($N_{\text{sig}} 1.07\text{M}$) $\sigma_y [10^{-3}]$	Belle II MC ($N_{\text{sig}} 0.75\text{M}$) $\sigma_y [10^{-3}]$	Belle II MC σ_y scale to Belle SVD2 4S MC statistics $[10^{-3}]$
signal only (fix r_b , fix c_b , s_b)	1.74	1.90	1.59
signal only (float r_b , fix c_b , s_b)	1.93	2.06	1.72
signal only (float r_b , float c_b , s_b)	1.96	2.08	1.74
signal and background (float r_b , float c_b , s_b)	2.01	2.11	1.77

表 B.2 拟合 Belle SVD2 和 Belle II Toy MC 得到的 y 参数统计误差。

最右列将 Belle II Toy MC 拟合结果变换到 Belle Toy MC 统计量下。

	with Babar resolution	with Belle resolution	with Belle II resolution
$\sigma_x [\times 10^{-3}]$ (Fixed Dalitz-plot)	1.120	1.117	1.115
$\sigma_x [\times 10^{-3}]$ (Floating 12 complex coefficients)	1.776	1.687	1.545
$\sigma_y [\times 10^{-3}]$ (Fixed Dalitz-plot)	1.038	1.011	0.969
$\sigma_y [\times 10^{-3}]$ (Floating 12 complex coefficients)	1.510	1.435	1.320

表 B.3 对 BaBar, Belle SVD2 和 Belle II Toy MC 进行含时达利兹图分析得到的混合参数统计误差。

B.8 $M(D^0)\text{-}Q$ 拟合的附录

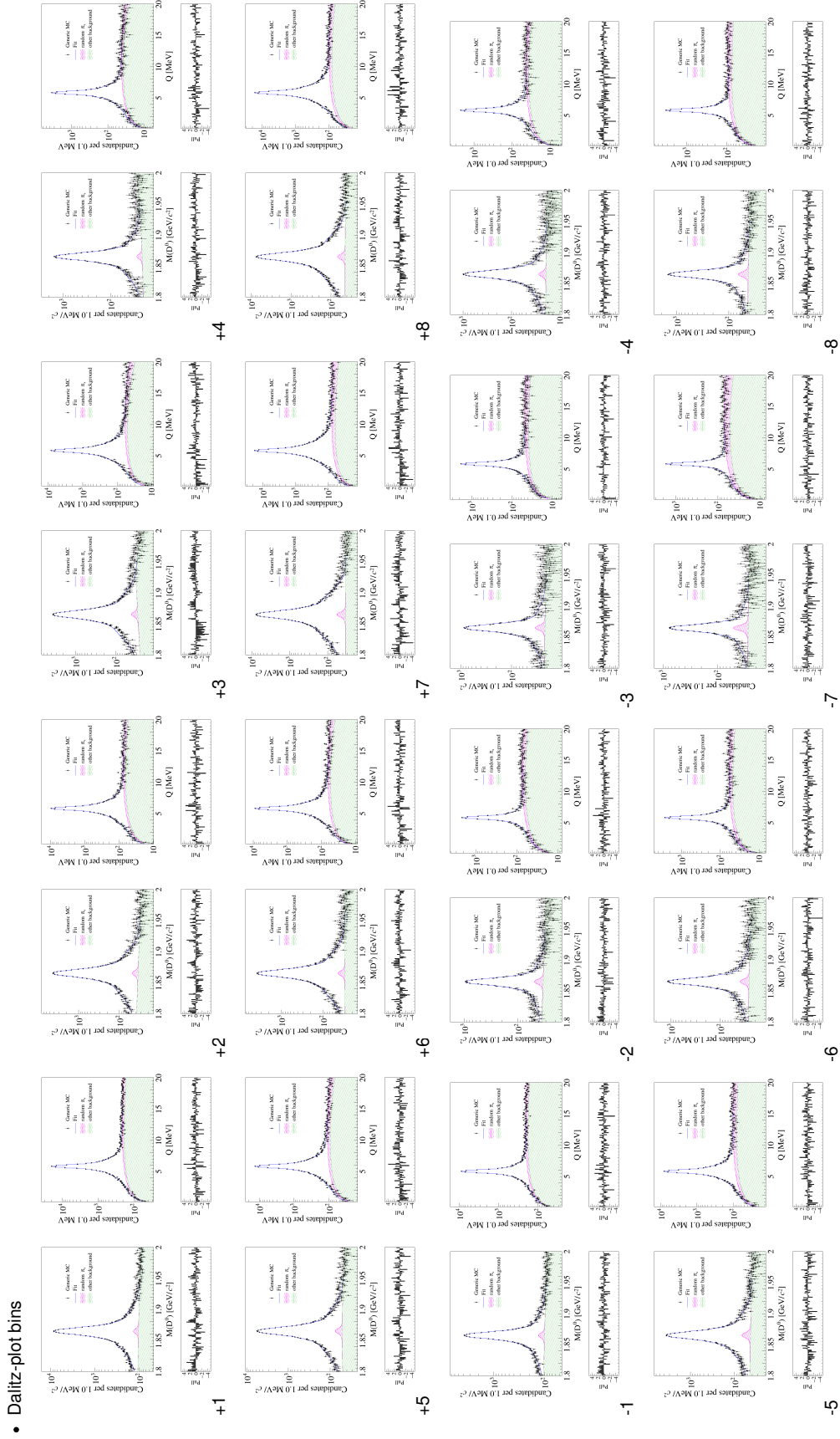
B.8.1 Generic MC 样本

图 B.35-B.36为 Belle II MC15 generic MC 的 D^{*+} 和 D^{*-} 候选者在不同达利兹图区间的 $M(D^0)\text{-}Q$ 二维拟合结果。

图 B.37-B.38为 Belle SVD1 $Y(4S)$ generic MC 的 D^{*+} 和 D^{*-} 候选者在不同达利兹图区间的 $M(D^0)\text{-}Q$ 二维拟合结果。

图 B.39-B.40为 Belle SVD2 $Y(4S)$ generic MC 的 D^{*+} 和 D^{*-} 候选者在不同达利兹图区间的 $M(D^0)\text{-}Q$ 二维拟合结果。

图 B.41-B.42为 Belle SVD2 $Y(5S)$ generic MC 的 D^{*+} 和 D^{*-} 候选者在不同达利兹图区间的 $M(D^0)\text{-}Q$ 二维拟合结果。


 图 B.35 Belle II MC15 generic MC 样本 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)\text{-}Q$ 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

• Dalitz-plot bins

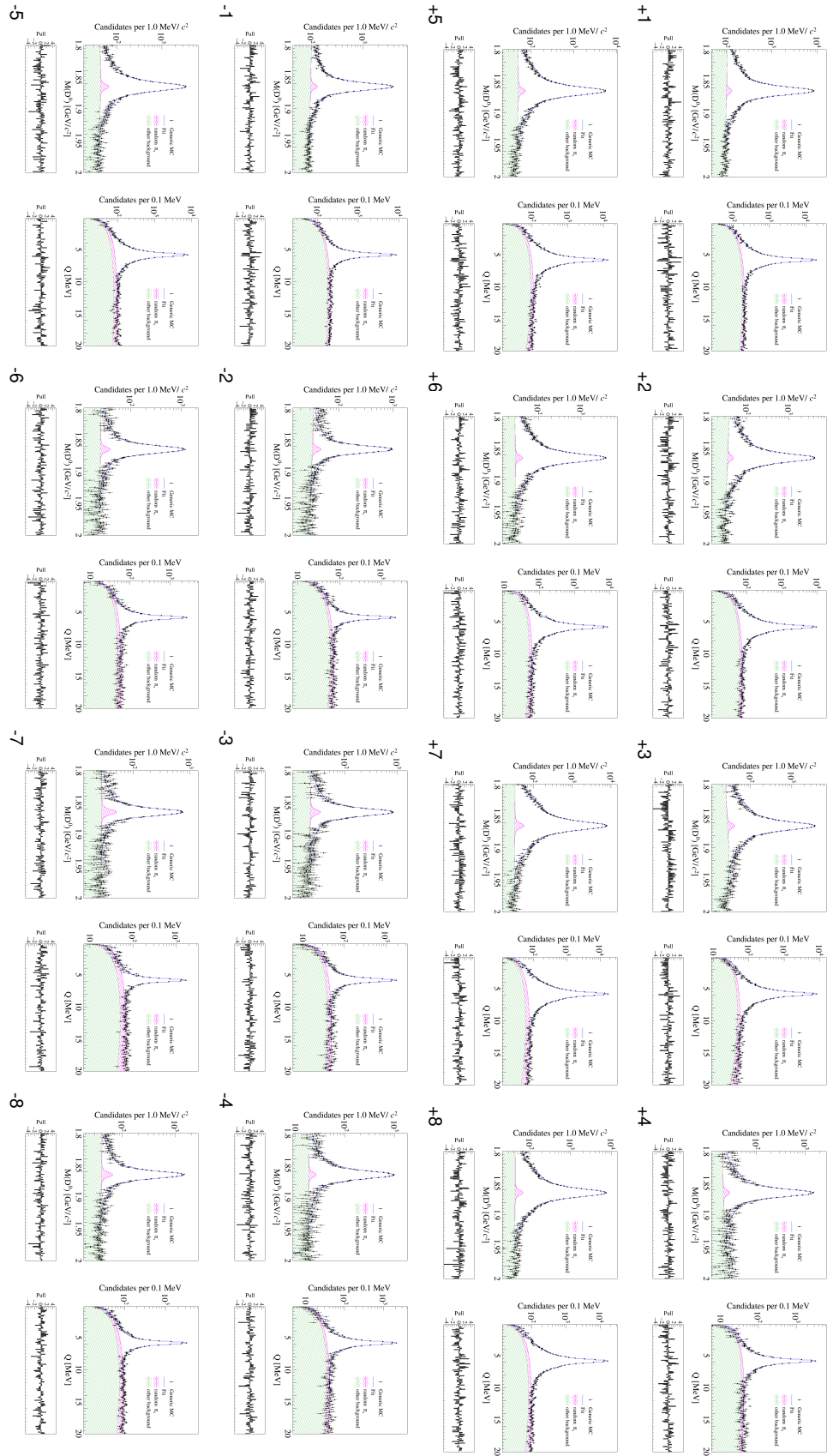
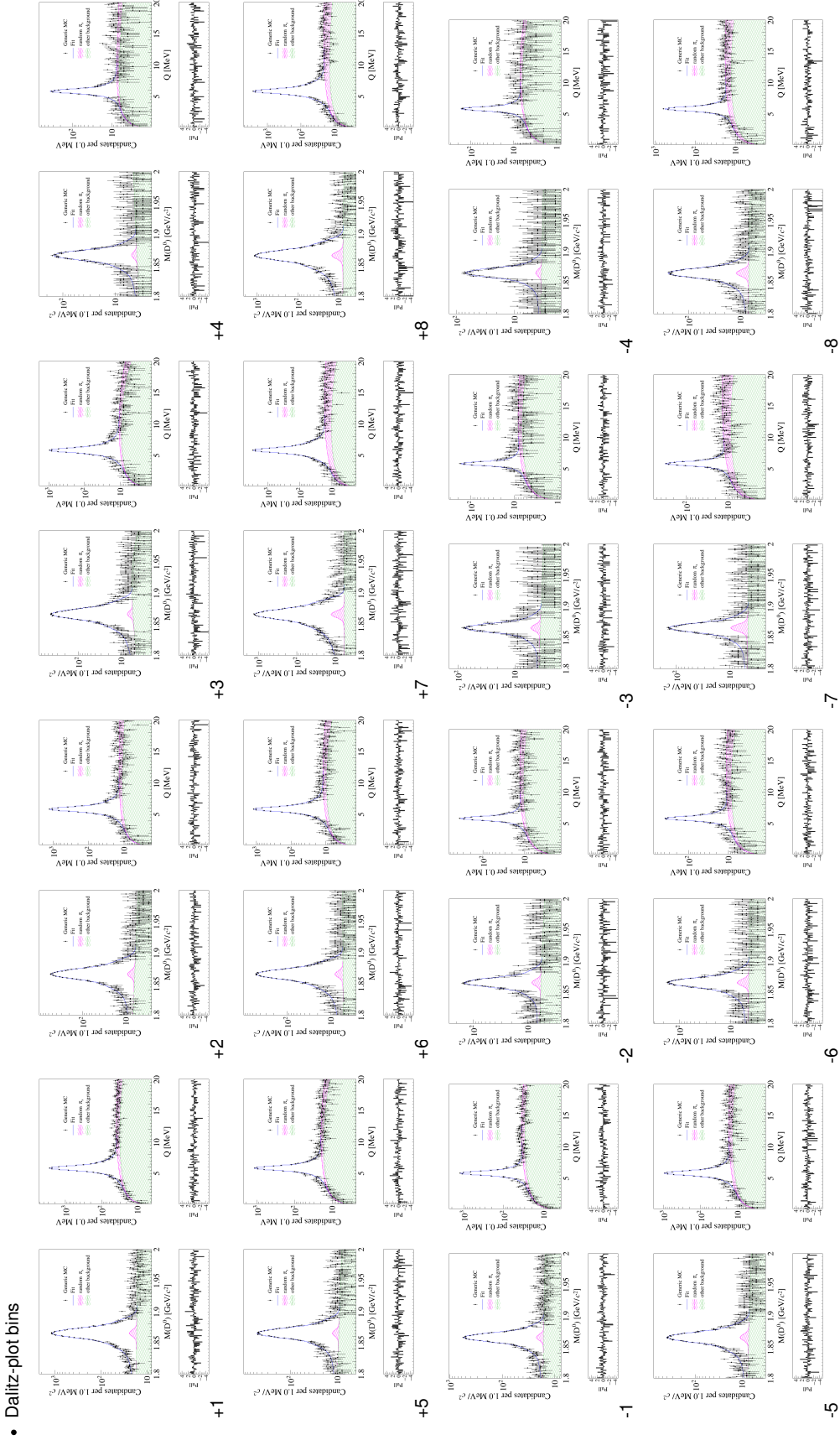


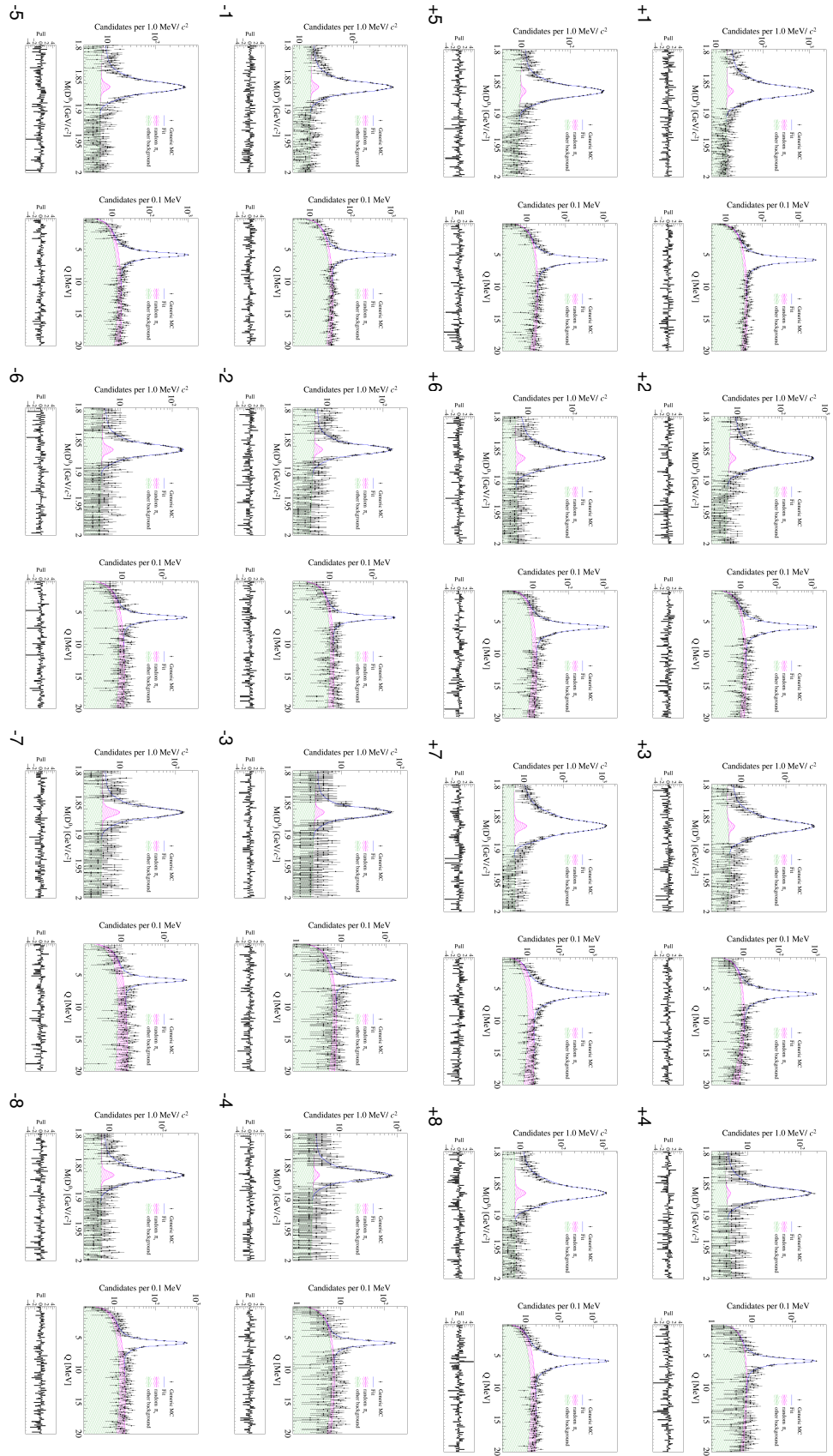
图 B.36 Belle II MC15 generic MC 样本 $D^{*-}\bar{D}^0$ 候选者的 $M(D^0)\text{-}Q$ 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

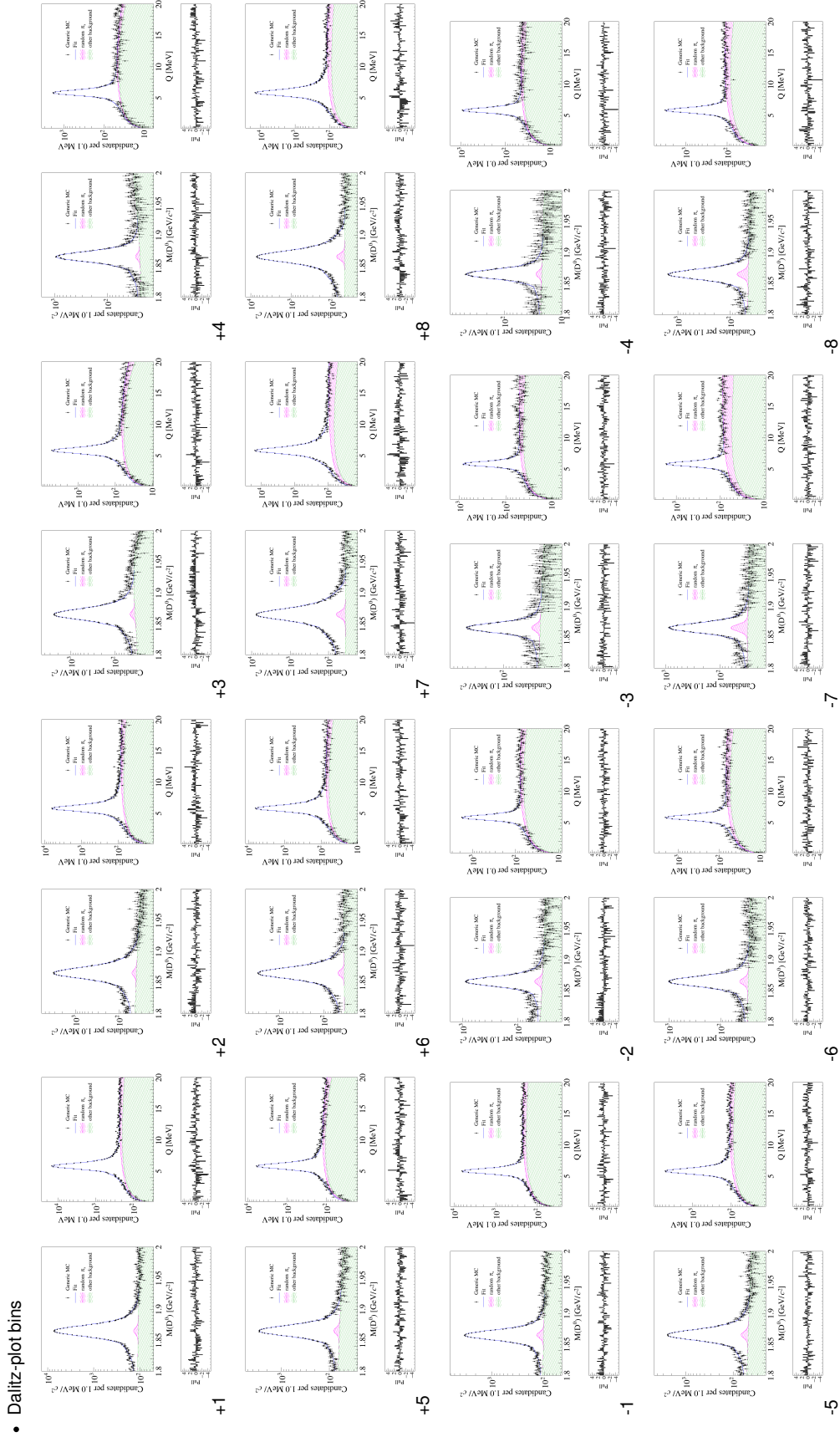

 图 B.37 Belle SVD1 $\Upsilon(4S)$ generic MC 样本 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$. 点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

• Dalitz-plot bins

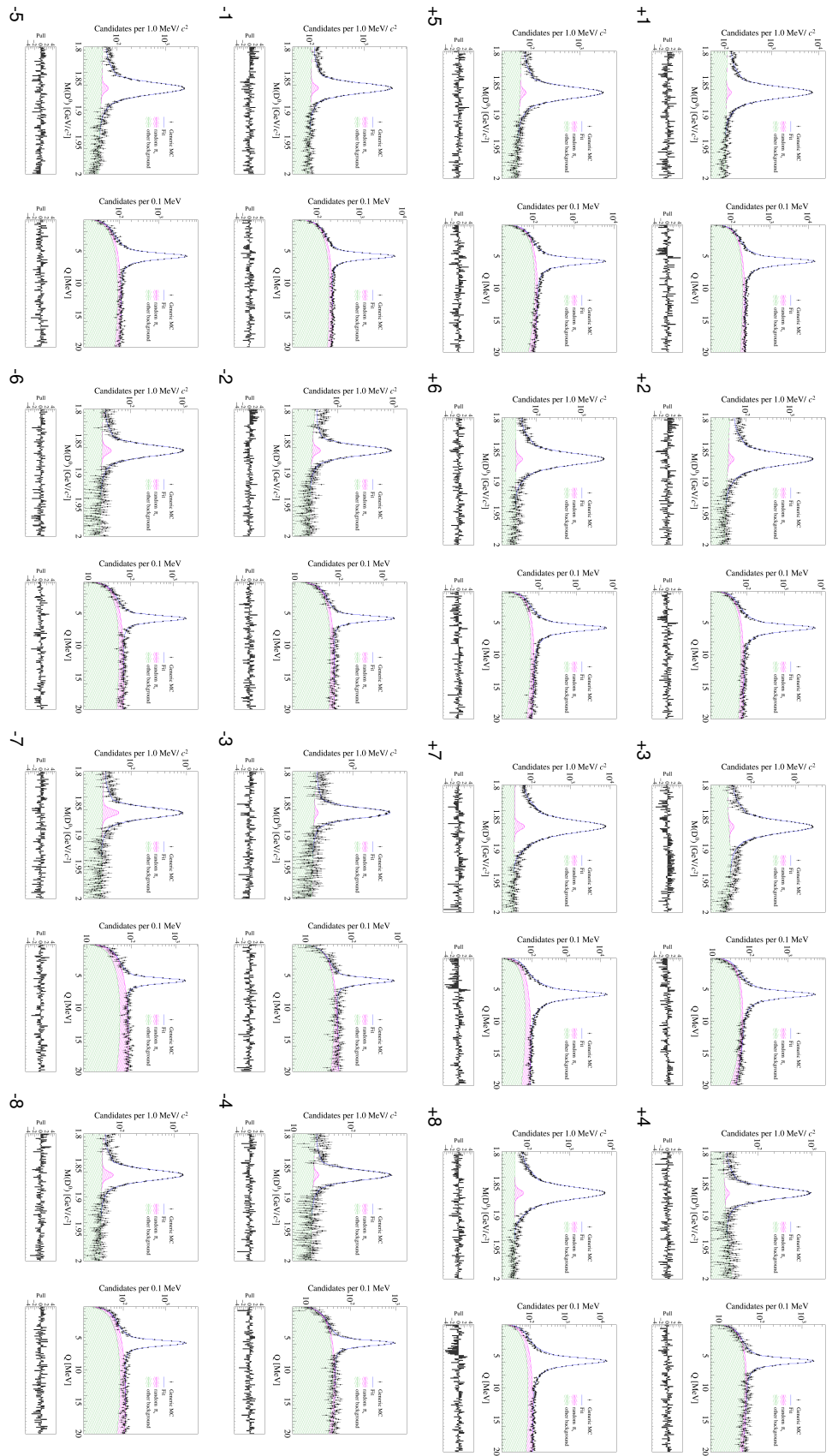

 图 B.38 Belle SVD1 $Y(4S)$ generic MC 样本 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

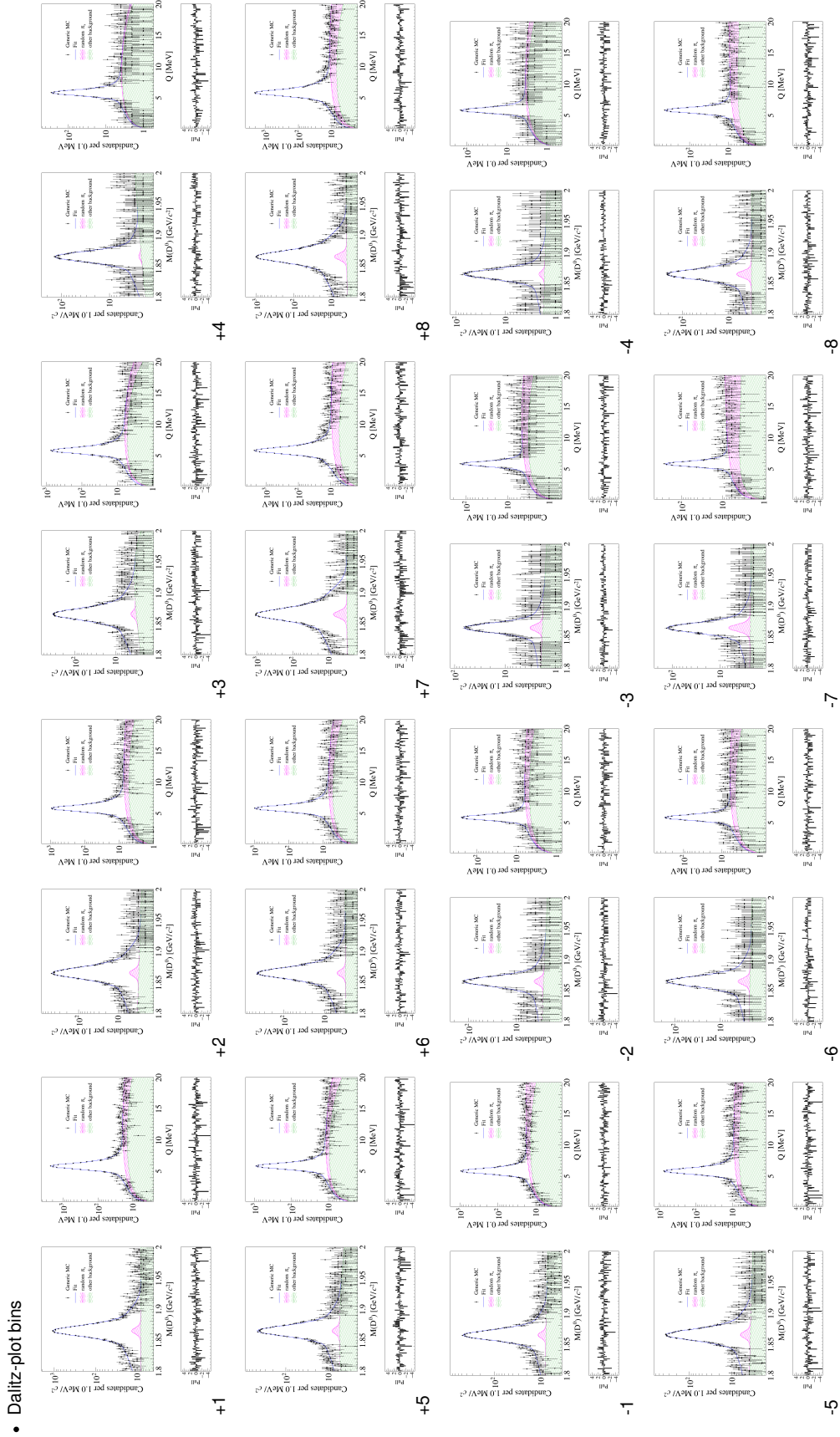

 图 B.39 Belle SVD2 $Y(4S)$ generic MC 样本 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$. 点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

• Dalitz-plot bins


 图 B.40 Belle SVD2 $\gamma(4S)$ generic MC 样本 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果， $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者，蓝直方图表示信号和本底的拟合函数，不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。


 图 B.41 Belle SVD2 $\Upsilon(5S)$ generic MC 样本 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$. 点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

- Dalitz-plot bins

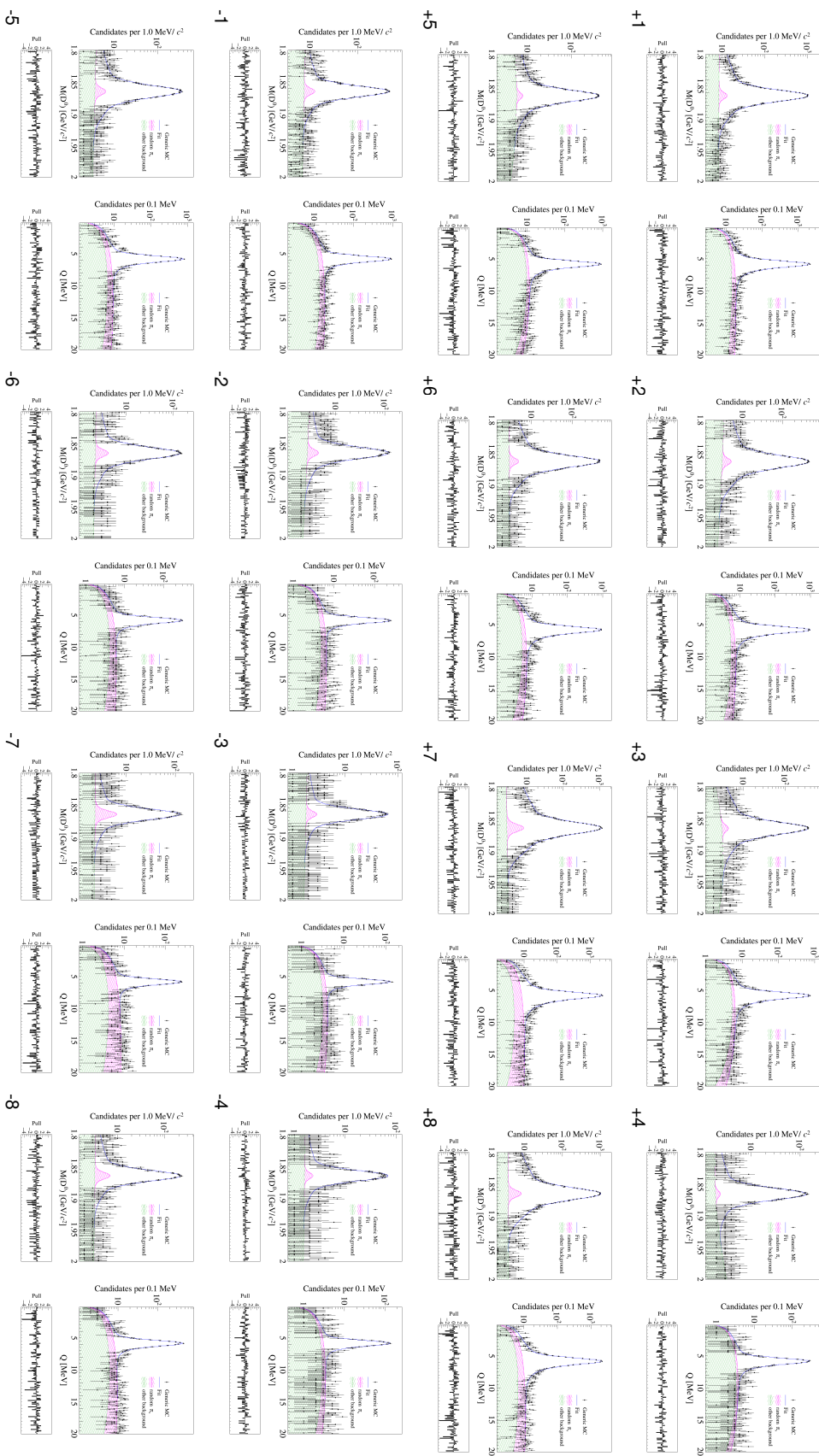


图 B.42 BelleSVD2 $\Upsilon(5S)$ generic MC 样本 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)\text{-}Q$ 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

B.8.2 实验数据

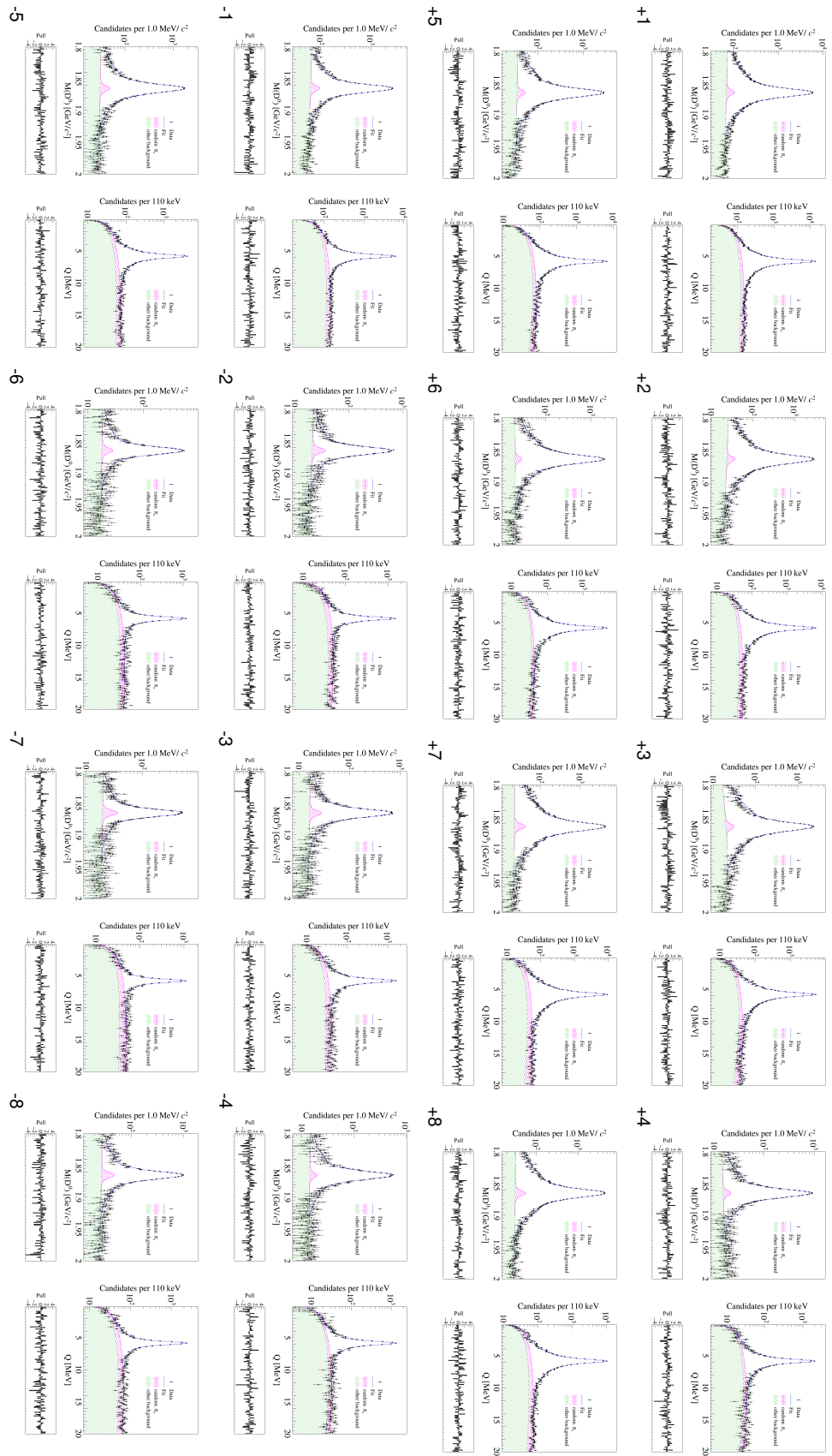
图 B.43-B.44为 Belle II 数据的 D^{*+} 和 D^{*-} 候选者在不同达利兹图区间的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图 B.45-B.46为 Belle SVD1 $Y(4S)$ 数据的 D^{*+} 和 D^{*-} 候选者在不同达利兹图区间的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

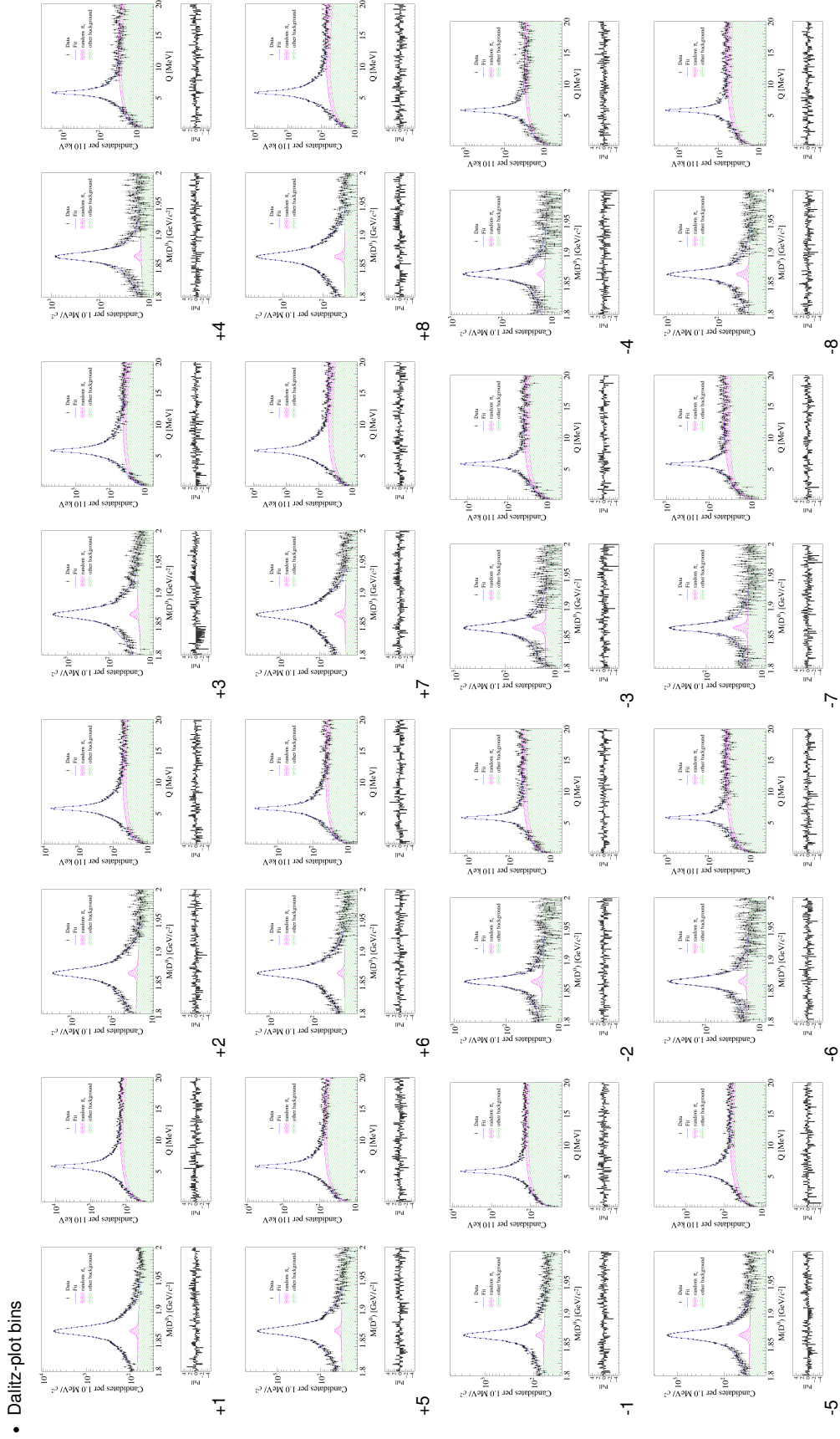
图 B.47-B.48为 Belle SVD2 $Y(4S)$ 数据的 D^{*+} 和 D^{*-} 候选者在不同达利兹图区间的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图 B.49-B.50为 Belle SVD2 $Y(5S)$ 数据的 D^{*+} 和 D^{*-} 候选者在不同达利兹图区间的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

• Dalitz-plot bins

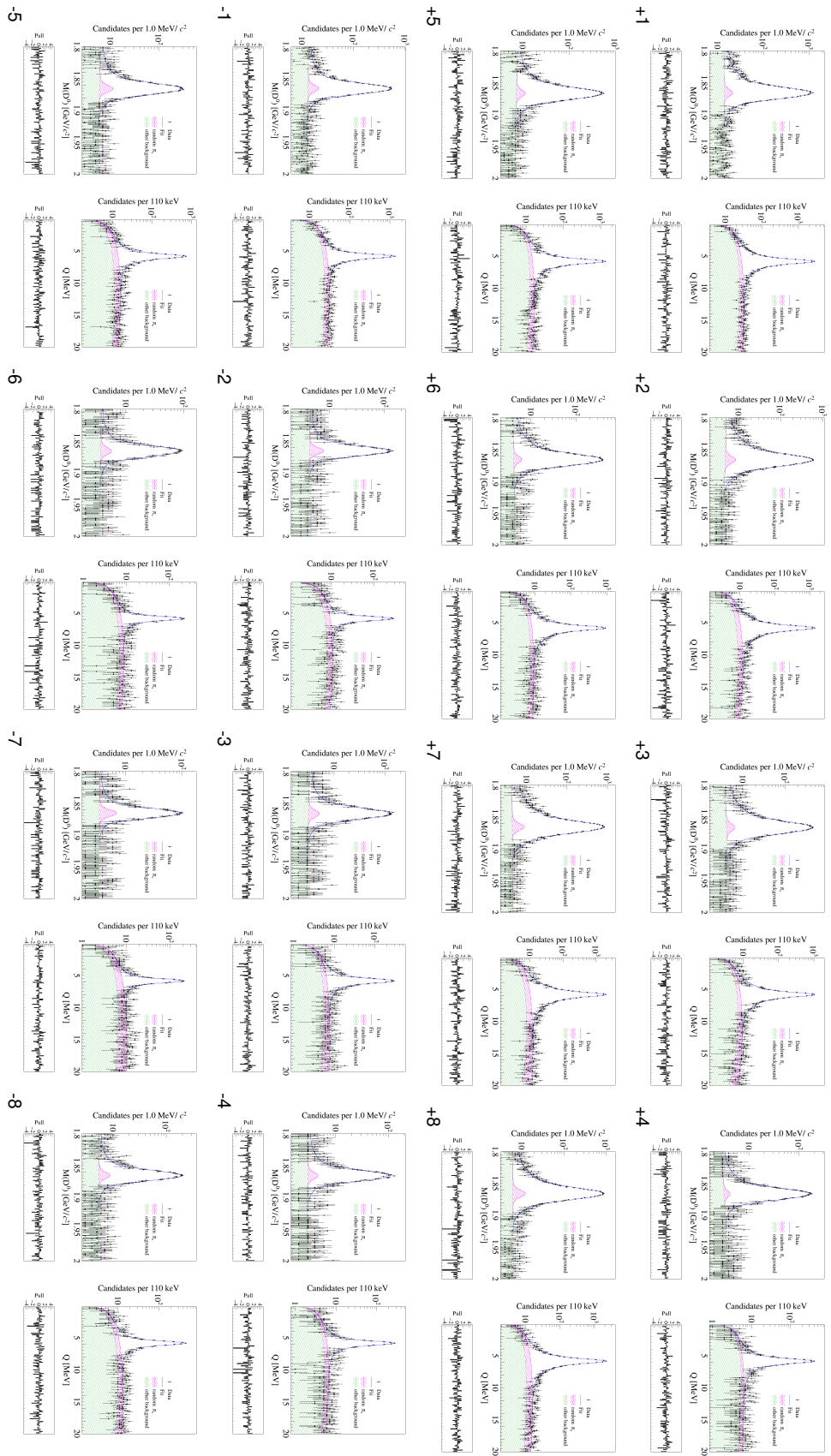

 图 B.43 Belle II 数据 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

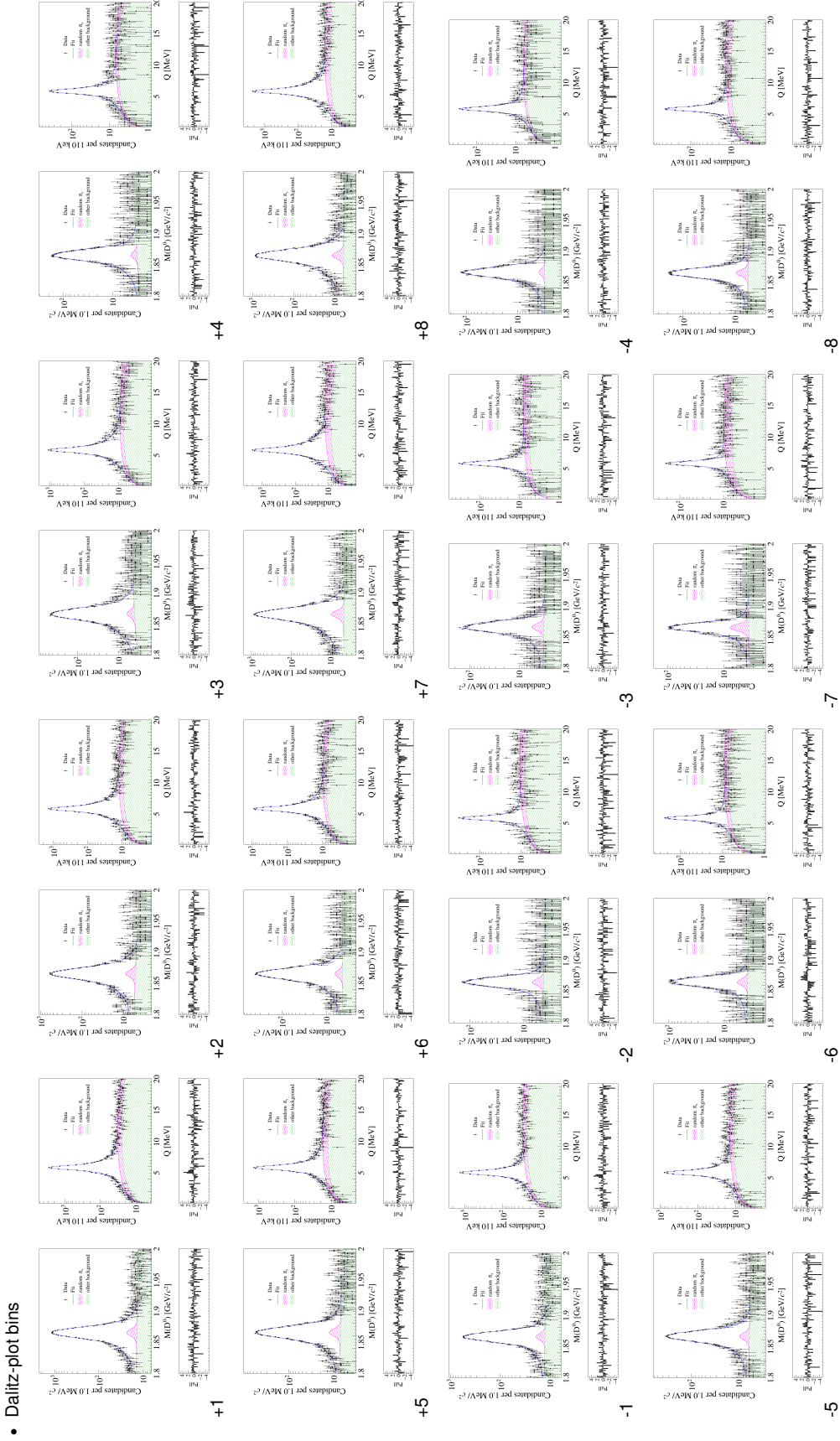

 图 B.44 Belle II 数据 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

• Daltz-plot bins

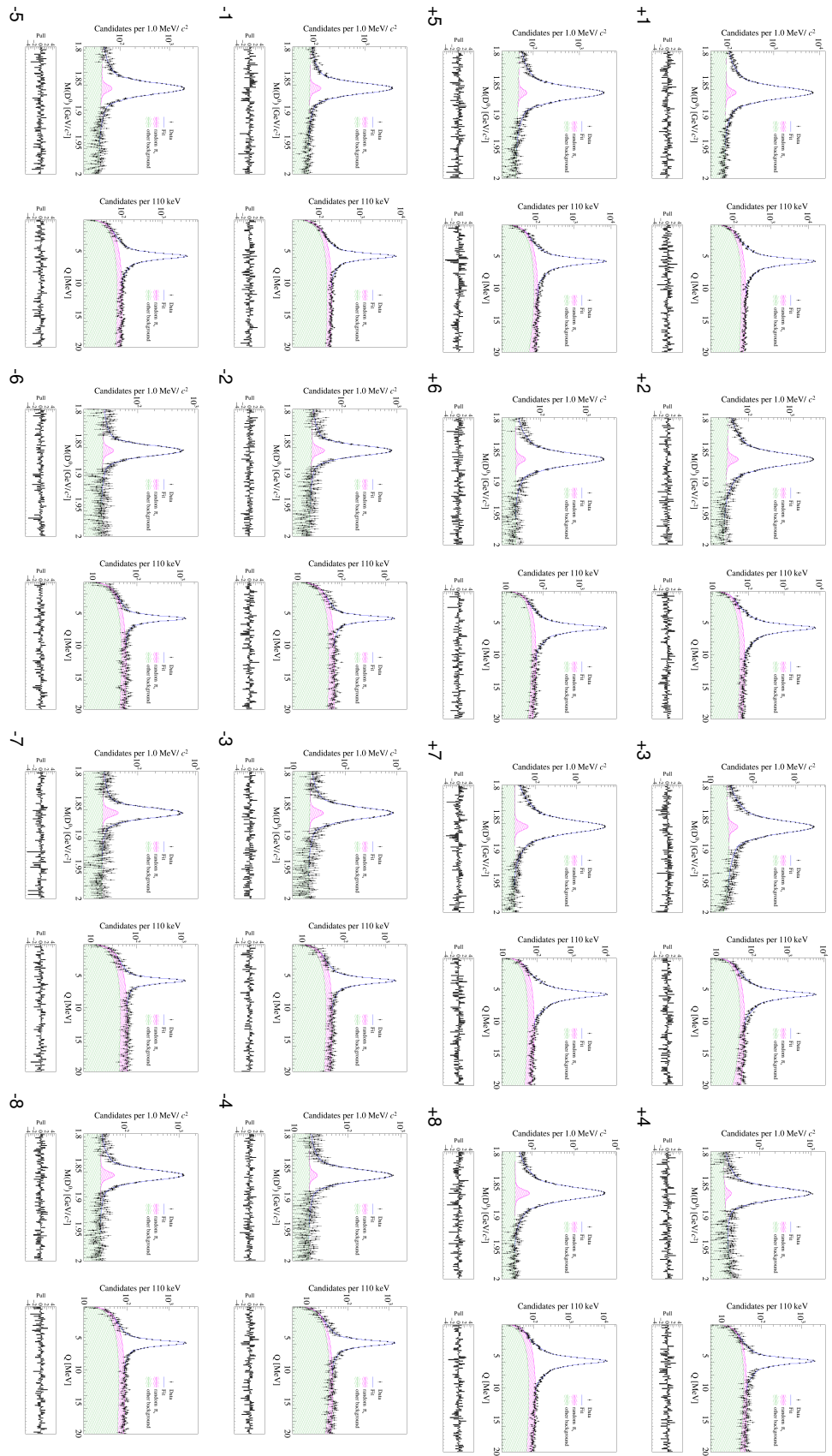

 图 B.45 Belle SVD1 $\gamma(4S)$ 数据 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)\text{-}Q$ 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

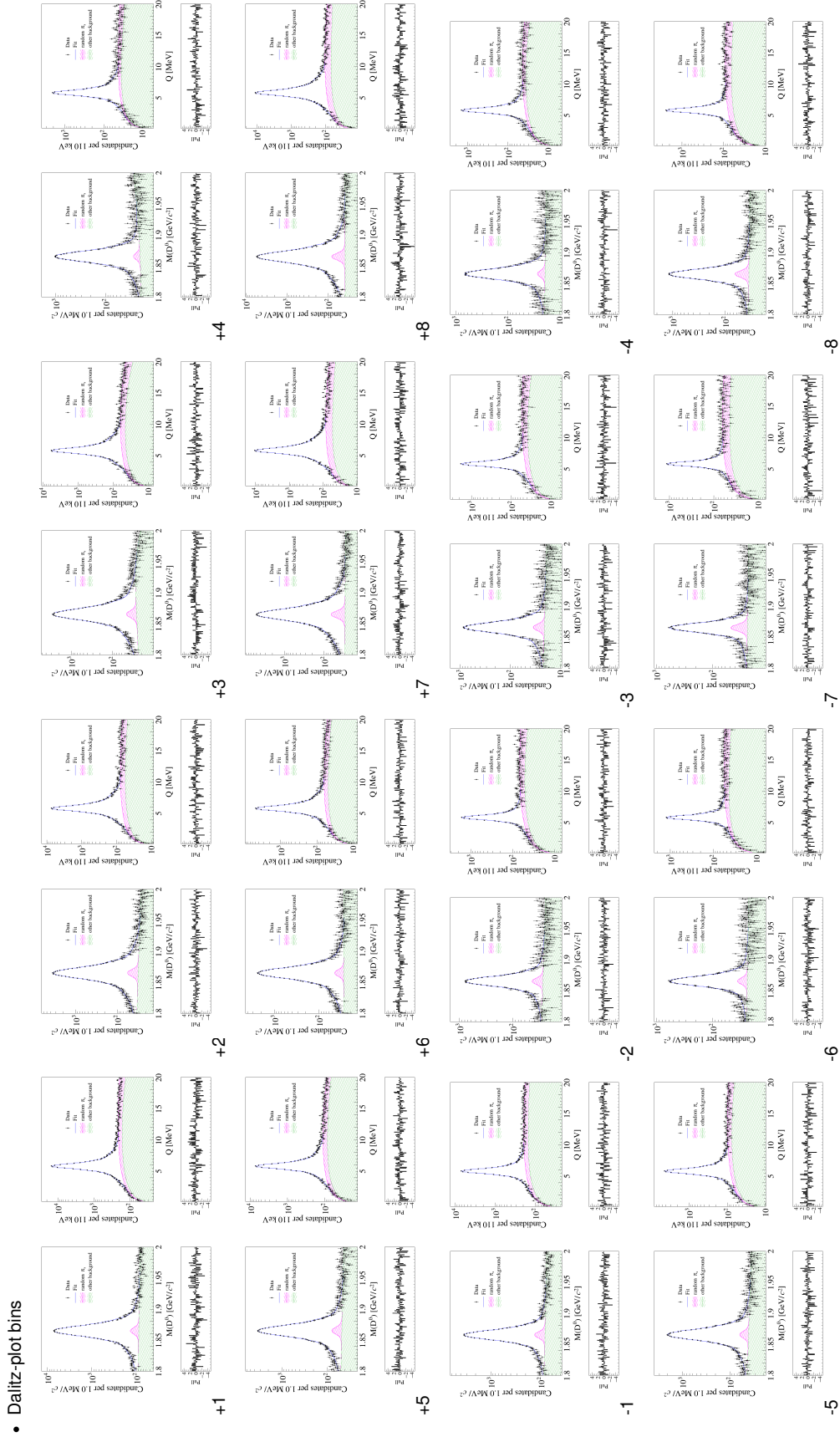

 图 B.46 Belle SVD1 $\Upsilon(4S)$ 数据 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$. 点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

• Dalitz-plot bins

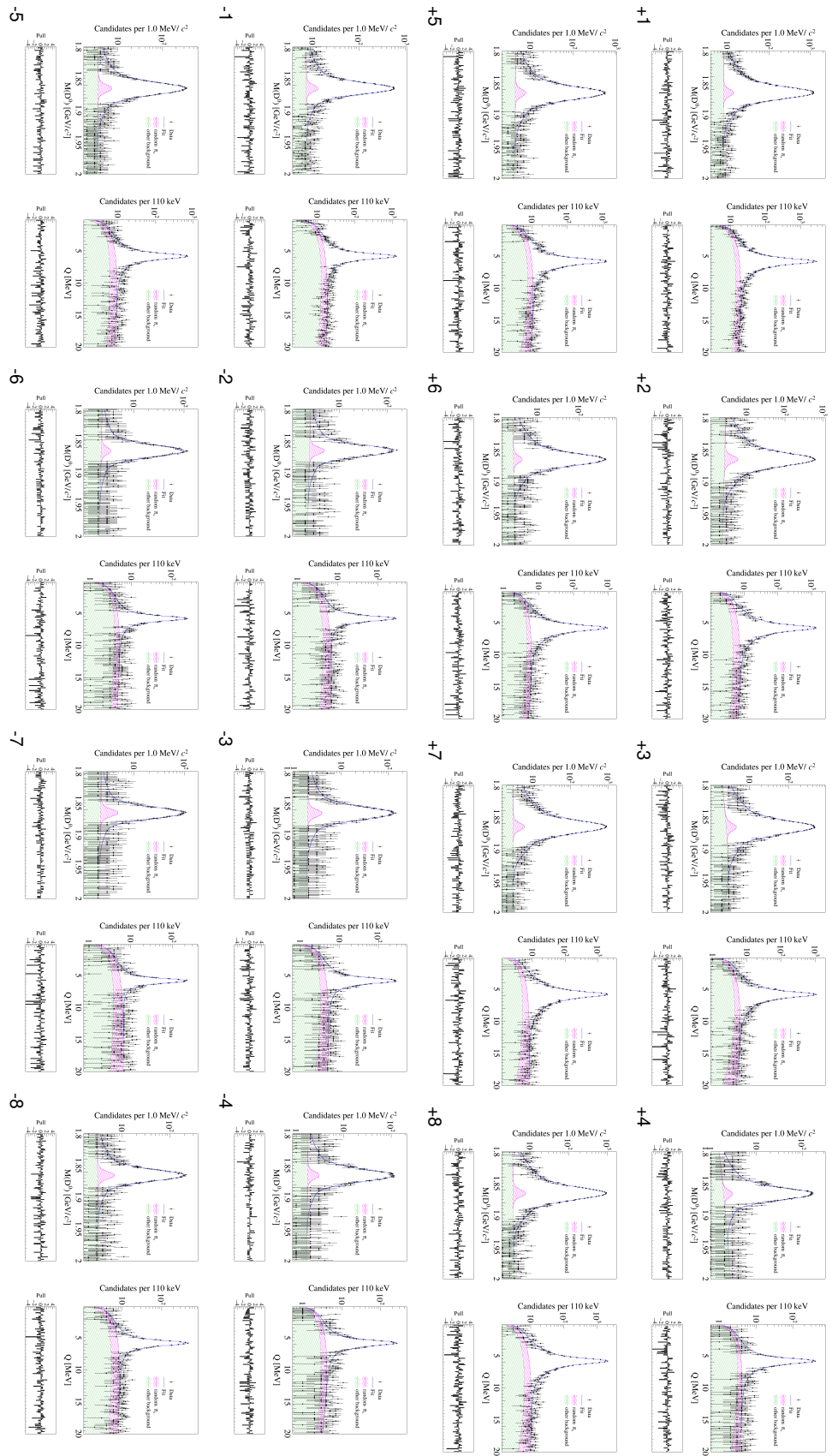

 图 B.47 Belle SVD2 $\gamma(4S)$ 数据 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

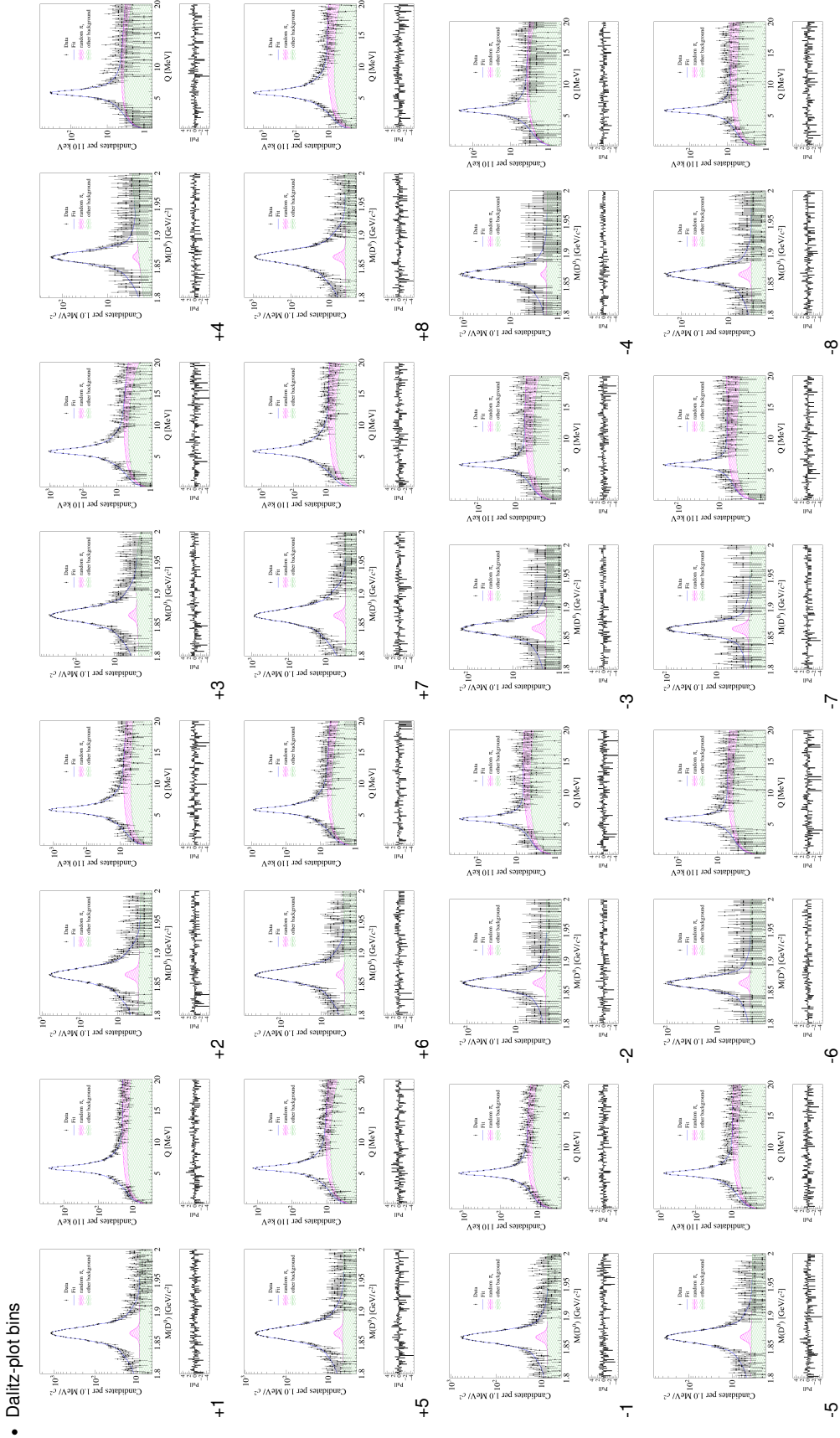

 图 B.48 Belle SVD2 $\Upsilon(4S)$ 数据 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

• Dalitz-plot bins


 图 B.49 Belle SVD2 $\gamma(5S)$ 数据 D^{*+} 候选者的 $M(D^0)$ - Q 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$. 点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

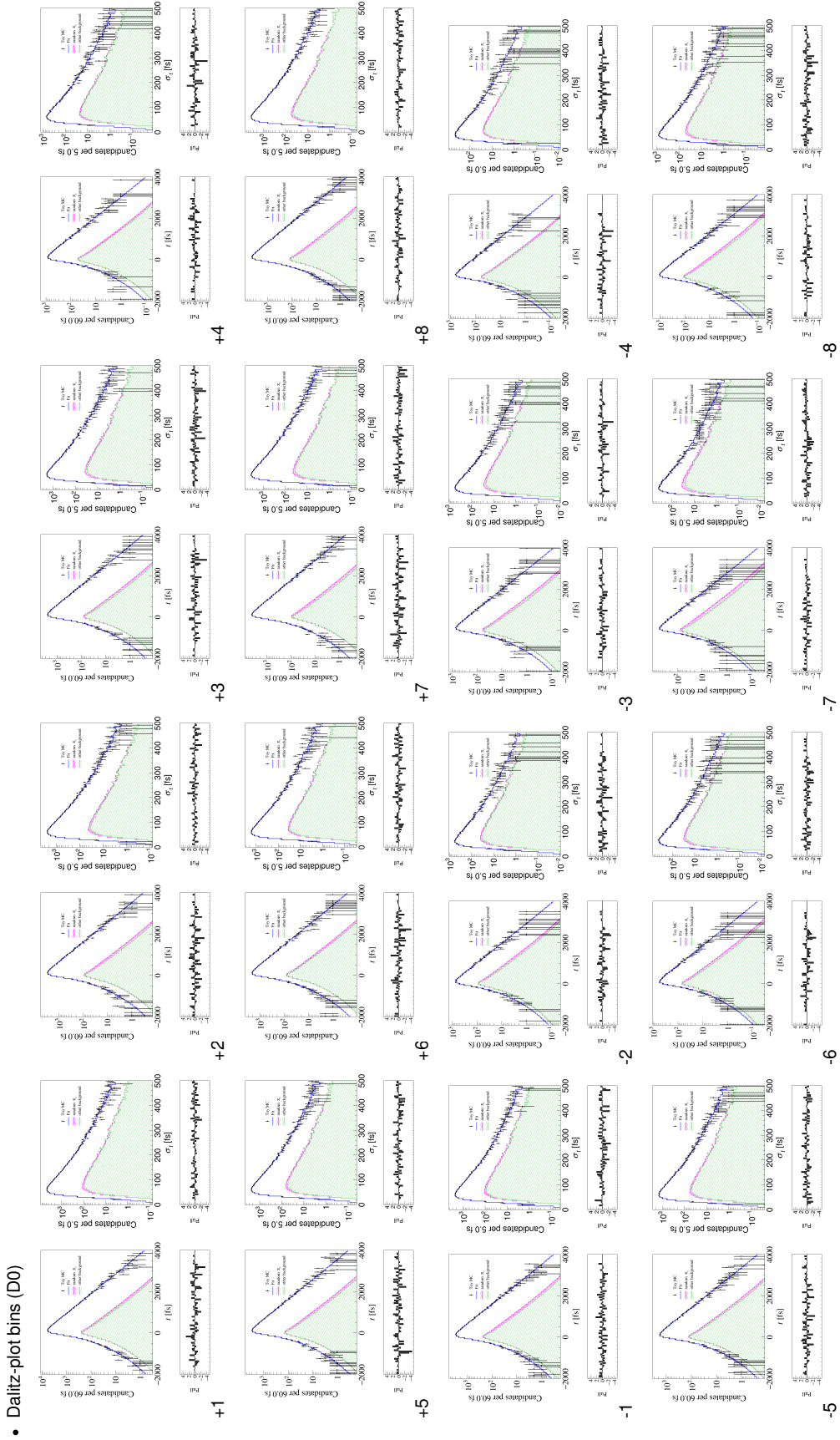

 图 B.50 Belle SVD2 $\gamma(5S)$ 数据 D^{*-} 候选者的 $M(D^0)\text{-}Q$ 二维拟合结果。

图中分别展示了达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的第三步拟合结果, $i = 1, \dots, 8$ 。点表示候选者, 蓝直方图表示信号和本底的拟合函数, 不同的阴影线直方图表示随机 π 介子本底和其他本底的拟合函数。

B.9 含时拟合的附录

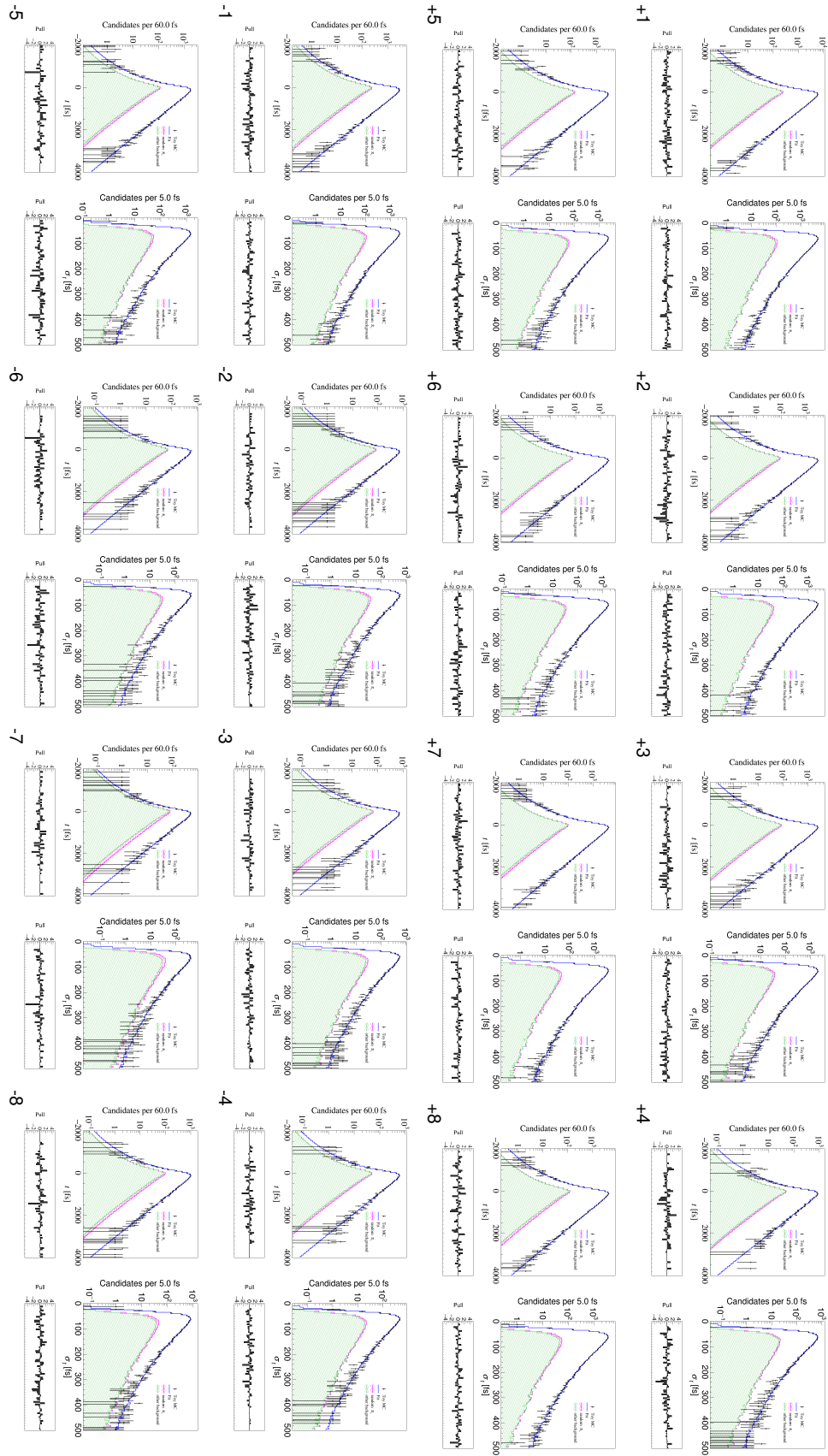
B.9.1 Toy MC 样本

Toy MC 样本包含 Belle 和 Belle II 部分。章节 6 联合拟合这些部分。拟合结果的 Belle II 部分如图 B.51-B.52 所示, Belle SVD1 $Y(4S)$ 部分如图 B.53-B.54 所示, Belle SVD2 $Y(4S)$ 部分如图 B.55-B.56 所示, Belle SVD2 $Y(5S)$ 部分如图 B.57-B.58 所示。

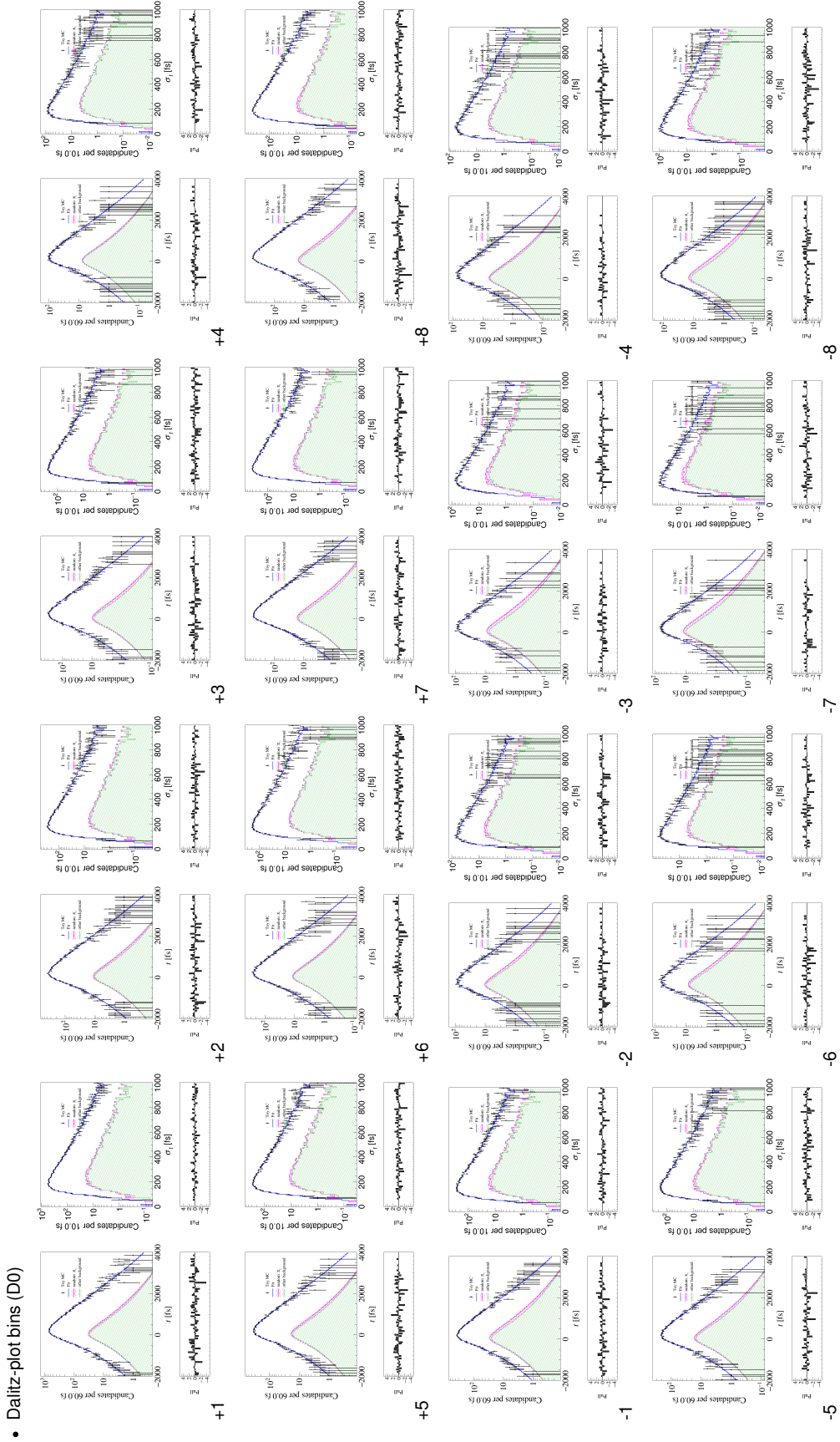

 图 B.51 Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle II, D^0 部分)。

Toy MC 样本在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_i) 分布拟合结果 (Belle II, D^0 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

• Daltz-plot bins (D0bar)

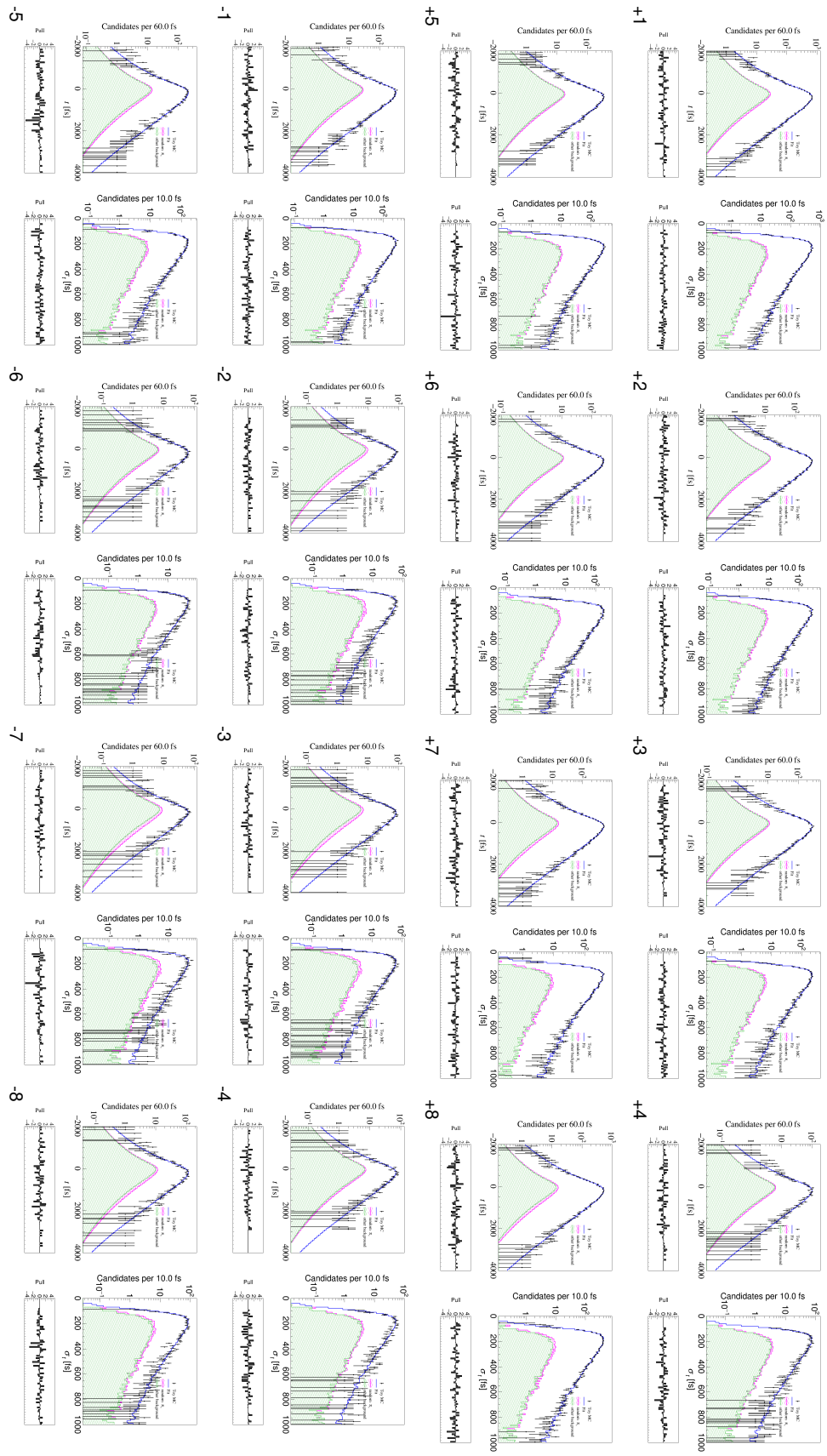

 图 B.52 Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle II, $\bar{D}^0$ 部分)。

Toy MC 样本在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ) 分布拟合结果 (Belle II, $\bar{D}^0$ 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

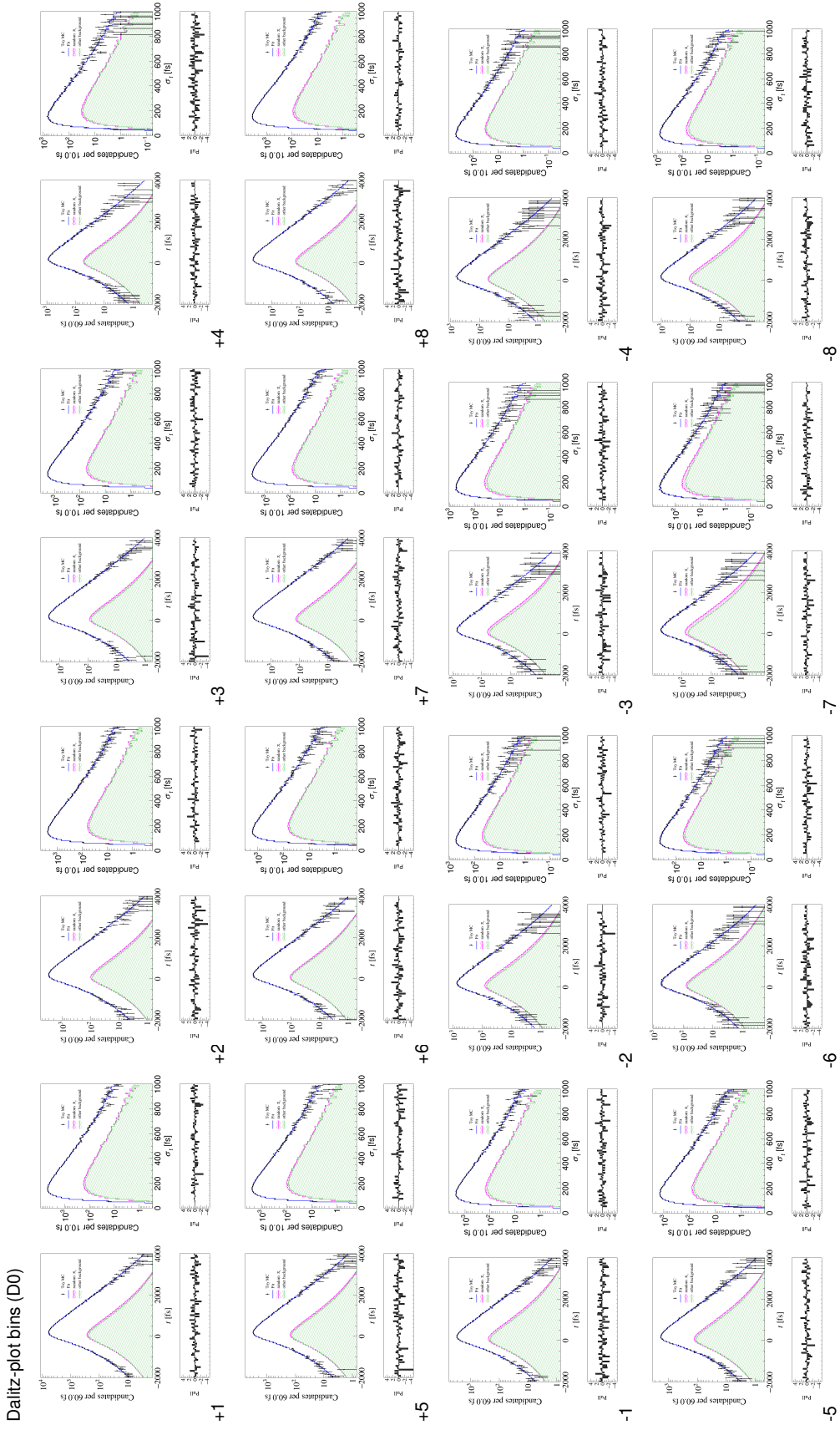

 图 B.53 Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD1 $\Upsilon(4S)$, D^0 部分)。

Toy MC 样本在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (r, σ) 分布拟合结果 (Belle SVD1 $\Upsilon(4S)$, D^0 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

• Daltz-plot bins (D0bar)

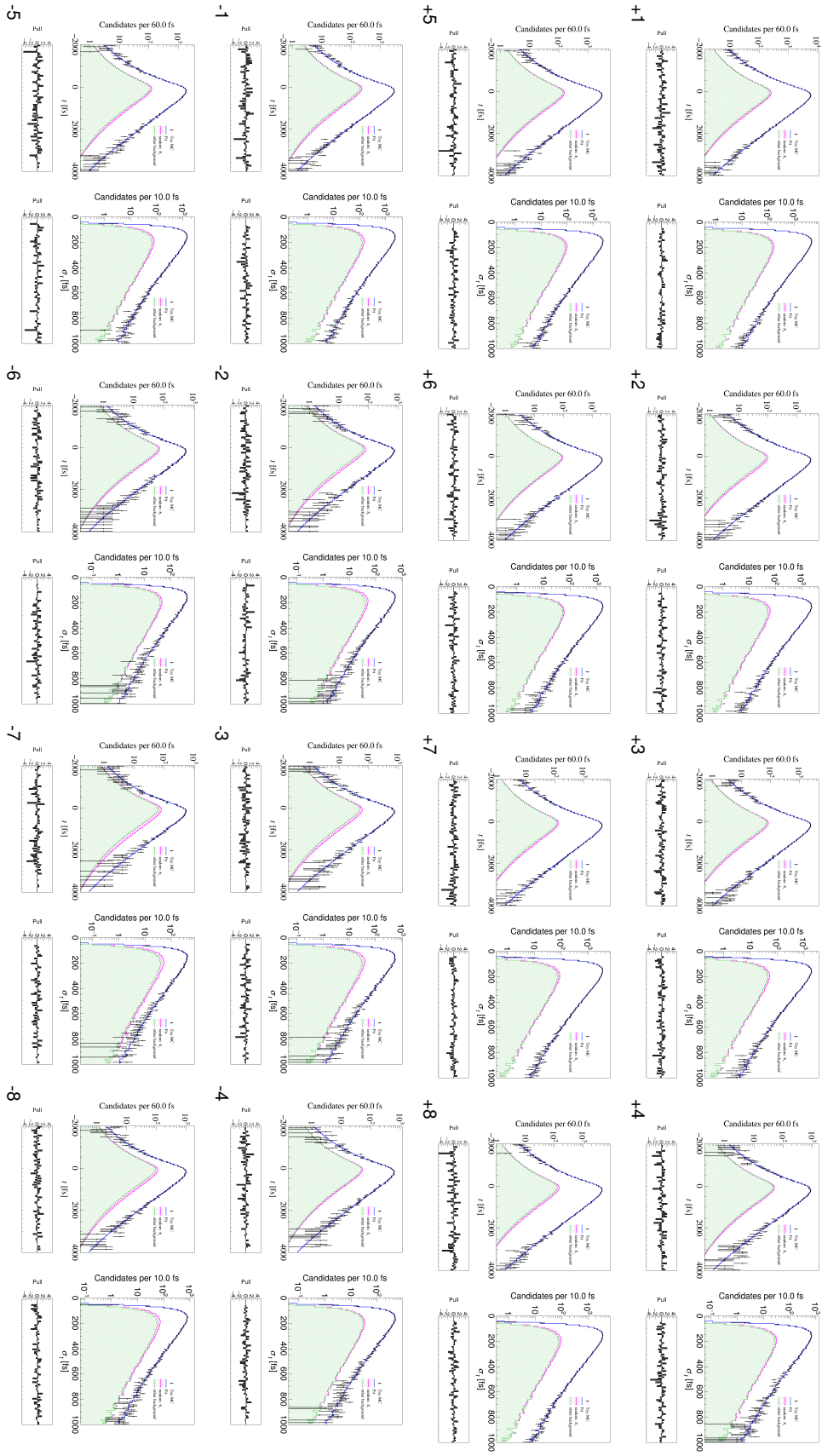

 图 B.54 Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD1 $\gamma(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。

Toy MC 样本在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_i) 分布拟合结果 (Belle SVD1 $\gamma(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

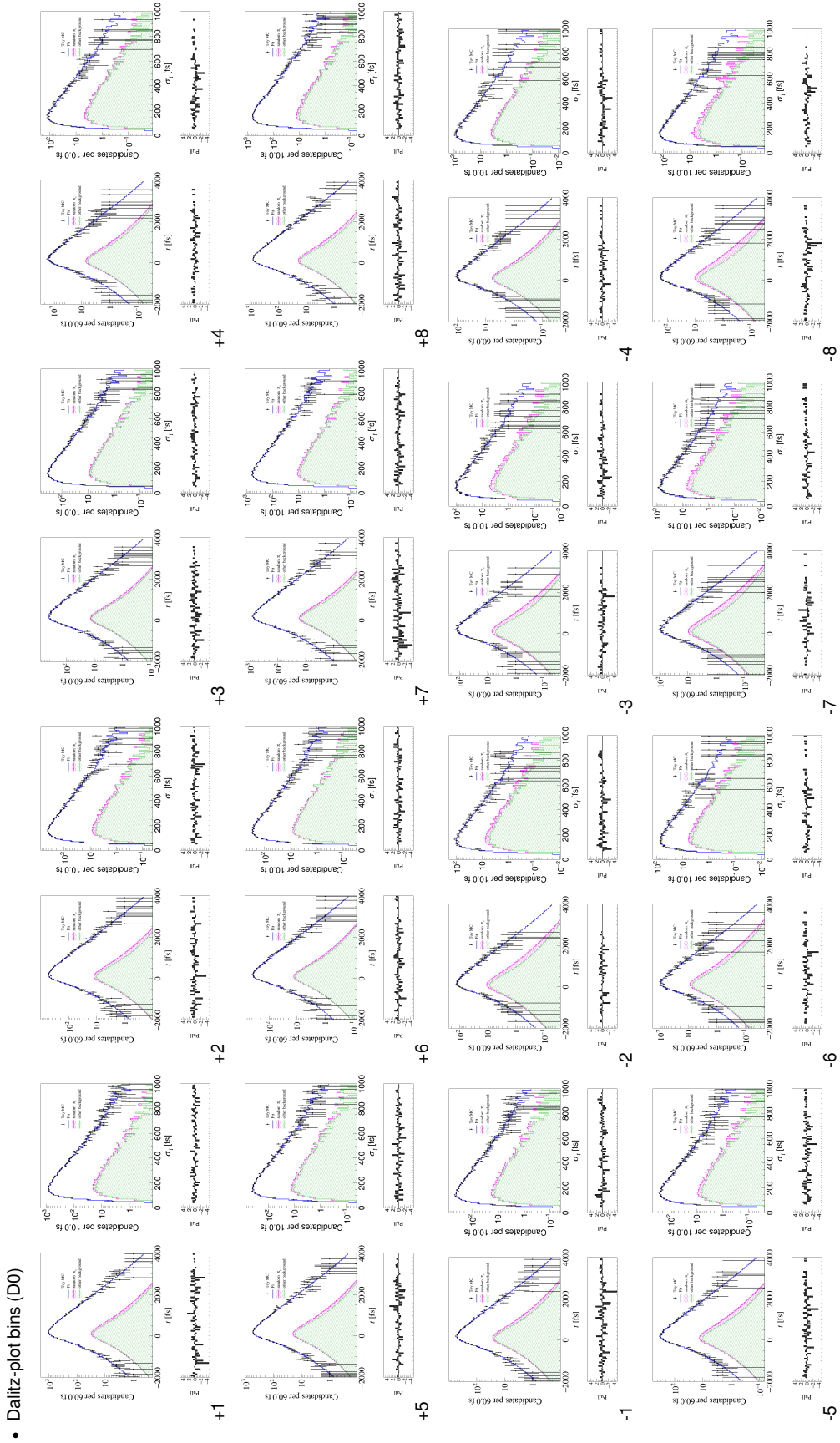

 图 B.55 Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(4S)$, D^0 部分)。

Toy MC 样本在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_i) 分布拟合结果 (Belle SVD2 $Y(4S)$, D^0 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

• Daltz-plot bins (D0bar)

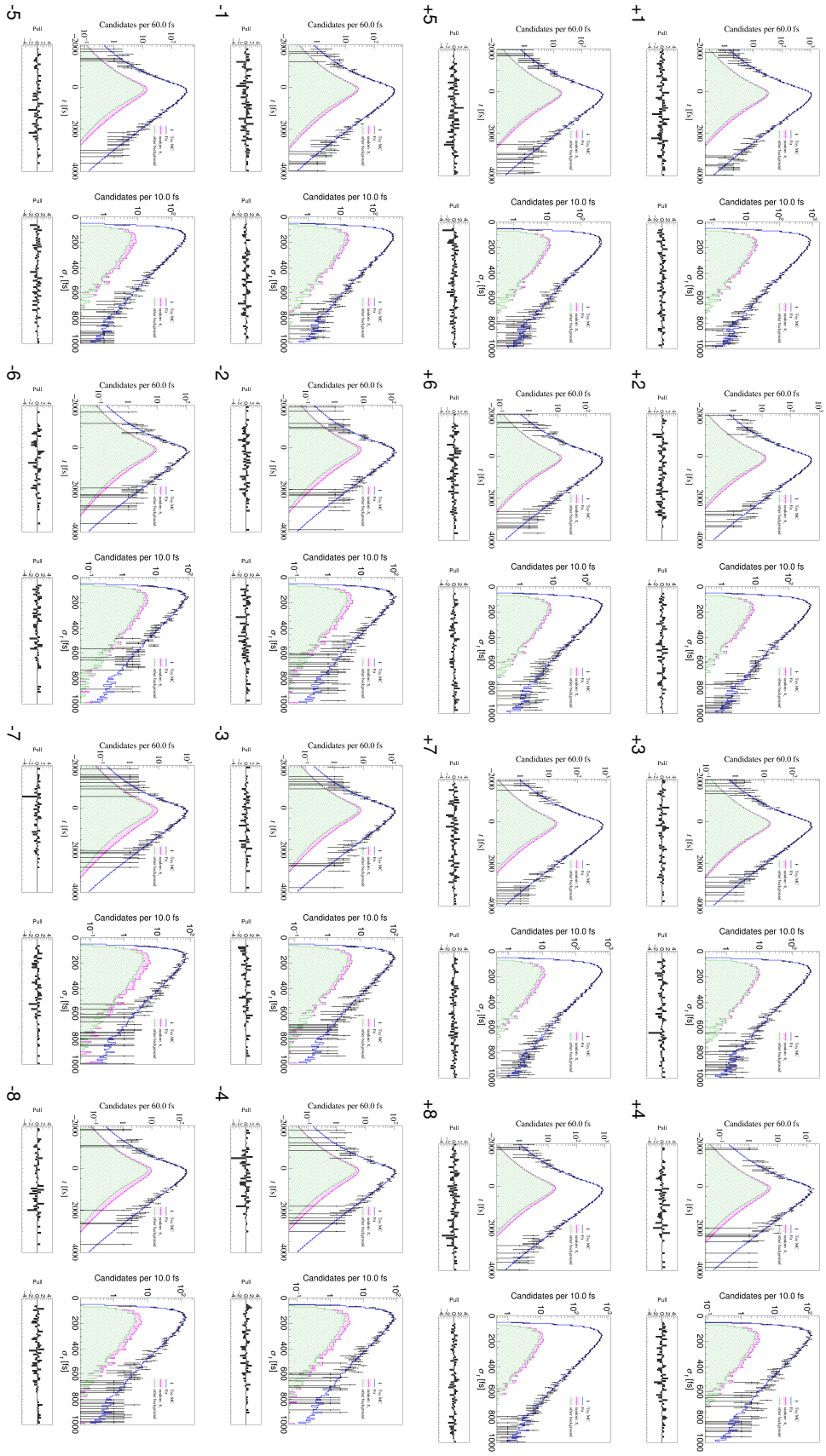

 图 B.56 Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD2 $\gamma(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。

Toy MC 样本在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_i) 分布拟合结果 (Belle SVD2 $\gamma(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。


 图 B.57 Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(5S)$, D^0 部分)。

Toy MC 样本在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_t) 分布拟合结果 (Belle SVD2 $Y(5S)$, D^0 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

• Daltz-plot bins (D0bar)

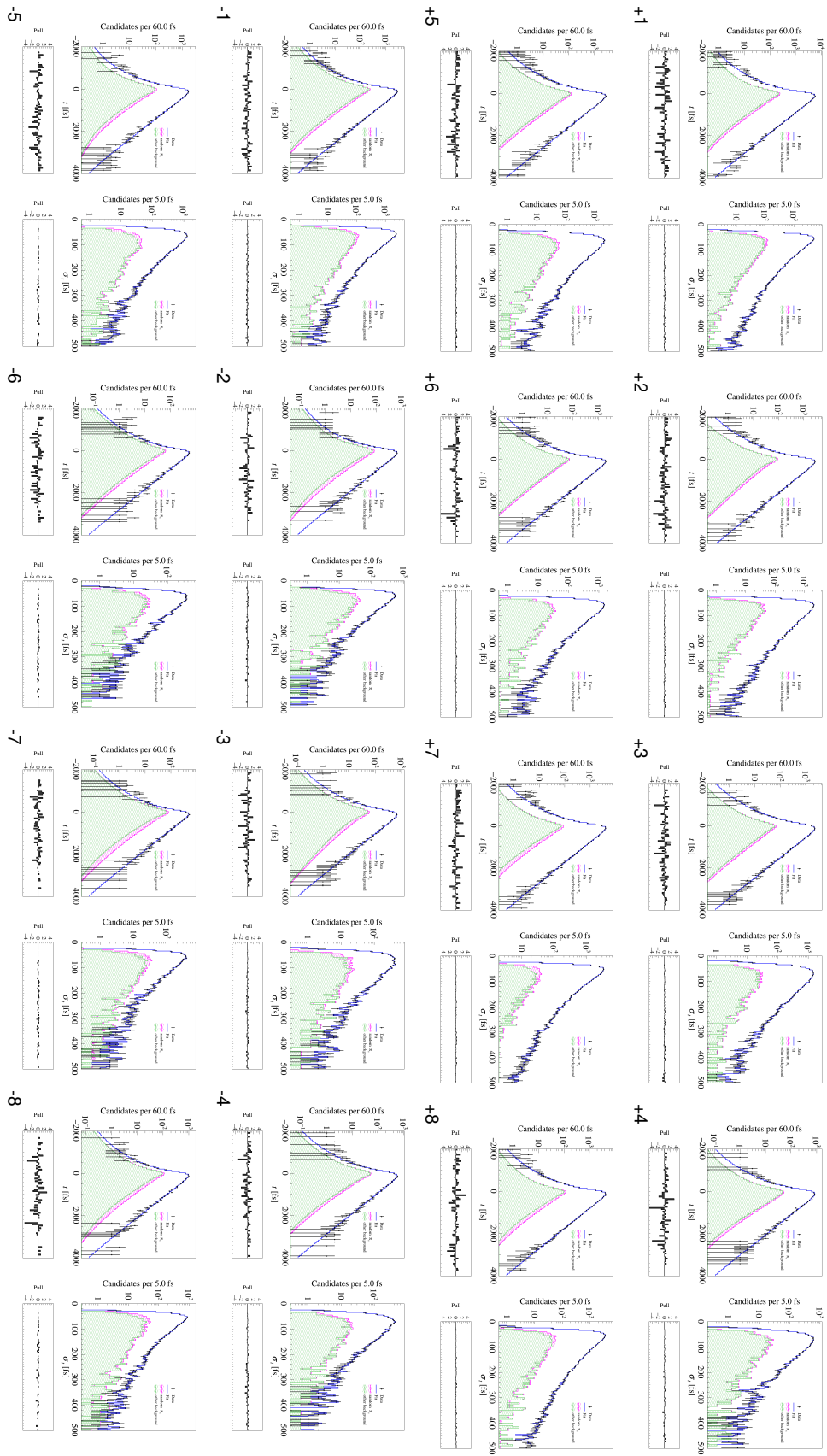

 图 B.58 Toy MC 样本的含时拟合结果 (Belle SVD2 $\gamma(5S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。

Toy MC 样本在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_i) 分布拟合结果 (Belle SVD2 $\gamma(5S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

B.9.2 实验数据

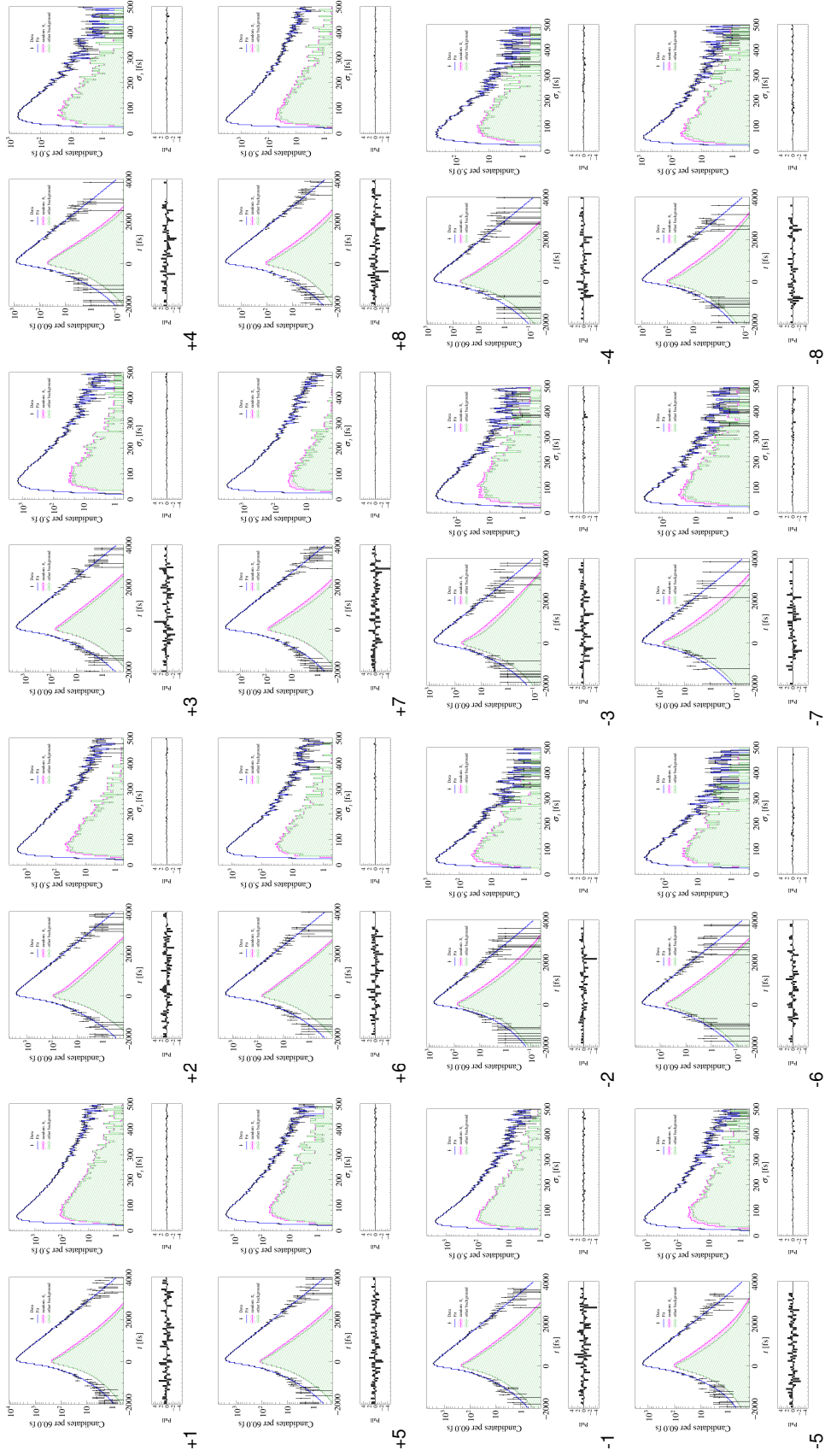
章节 6 对 Belle 和 Belle II 实验数据的 (t, σ_t) 分布进行了联合拟合。拟合结果的 Belle II 部分如图 B.59-B.60 所示, Belle SVD1 $Y(4S)$ 部分如图 B.61-B.62 所示, Belle SVD2 $Y(4S)$ 部分如图 B.63-B.64 所示, Belle SVD2 $Y(5S)$ 部分如图 B.65-B.66 所示。

• Daltz-plot bins (D0)


 图 B.59 Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle II, D^0 部分)。

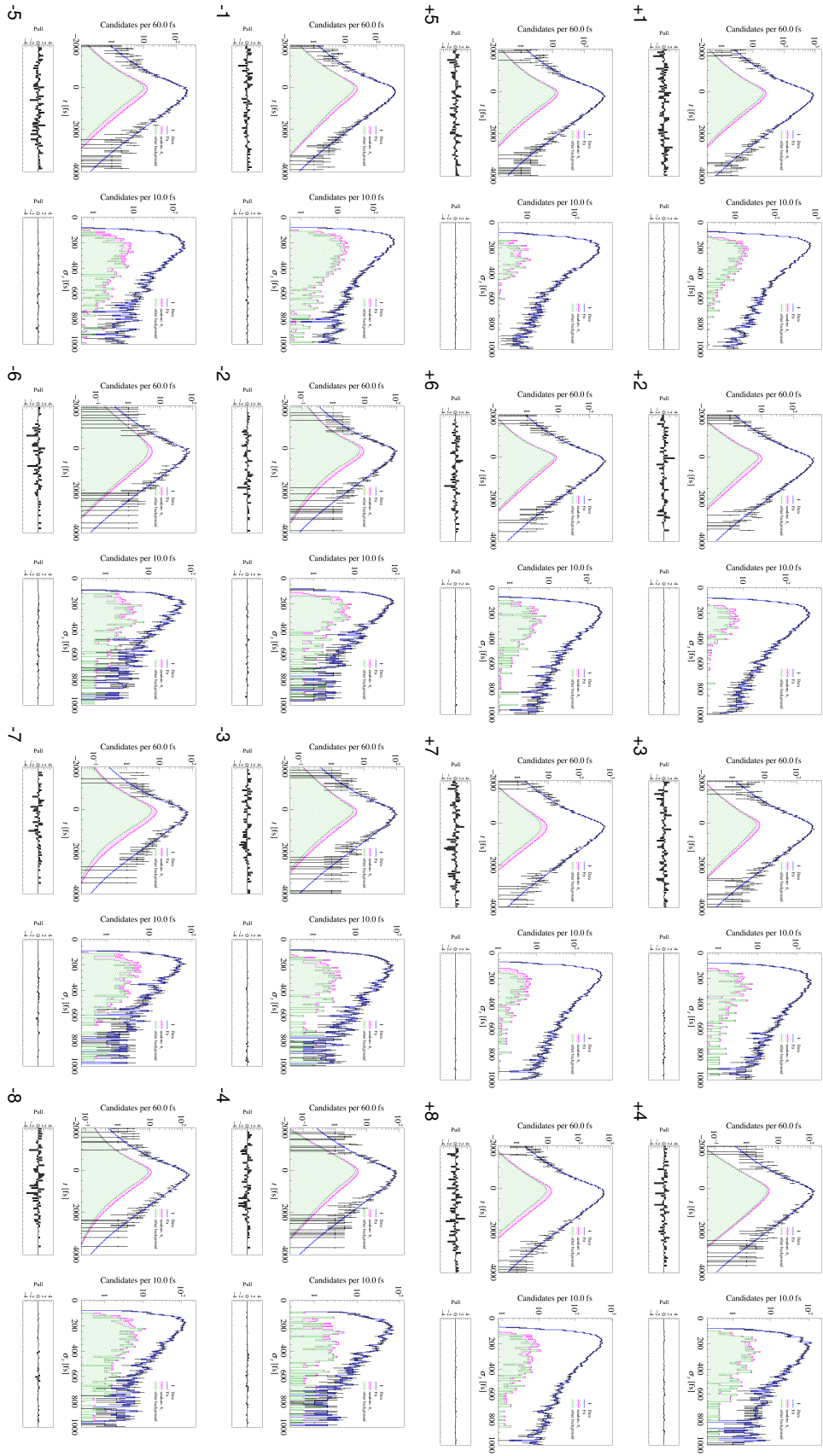
Belle 和 Belle II 数据在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ) 分布拟合结果 (Belle II, D^0 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

- Dalitz-plot bins (D0bar)

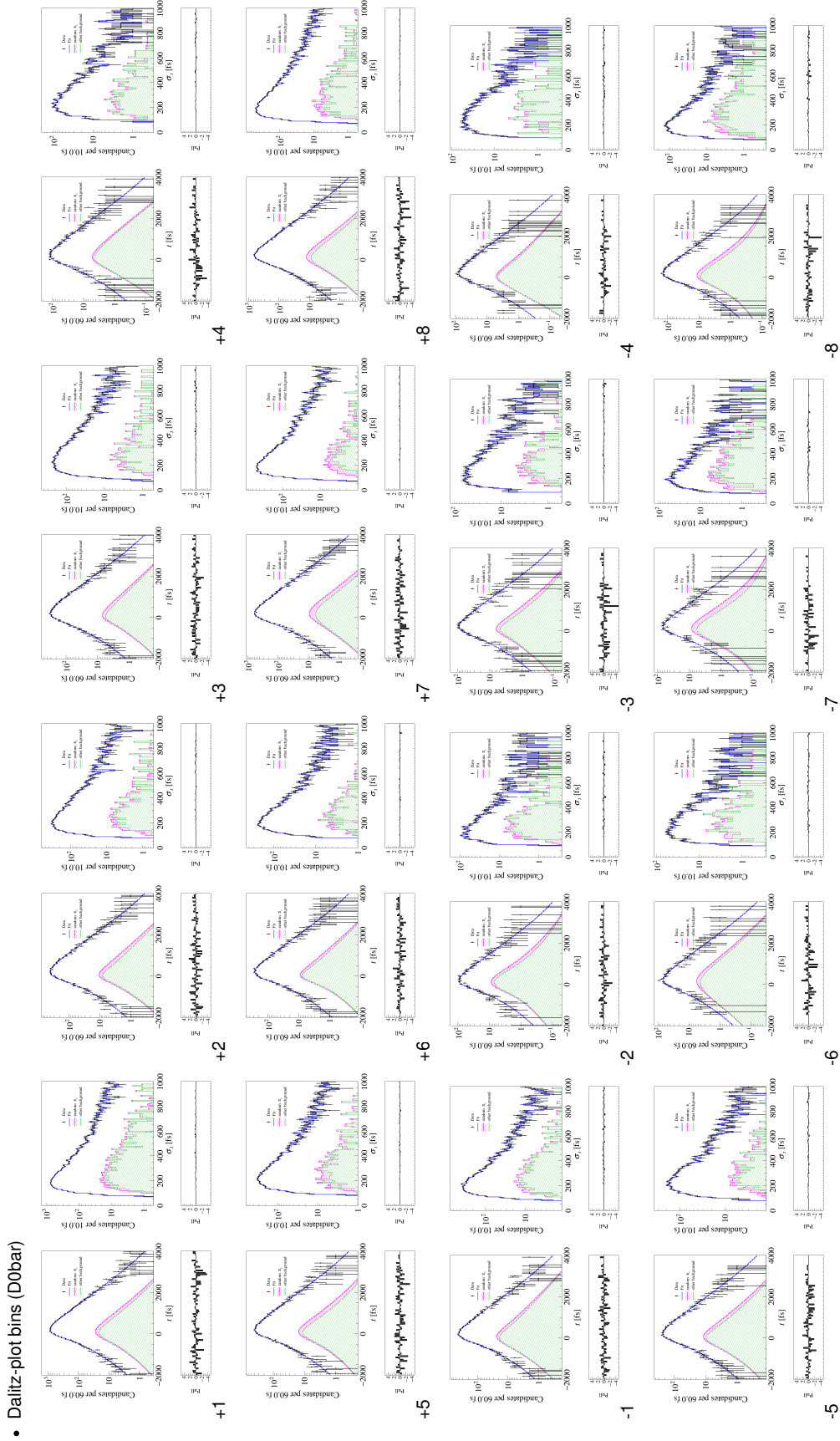

 图 B.60 Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle II, $\bar{D}^0$ 部分)。

Belle 和 Belle II 数据在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_i) 分布拟合结果 (Belle II, $\bar{D}^0$ 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

• Daltz-plot bins (D0)

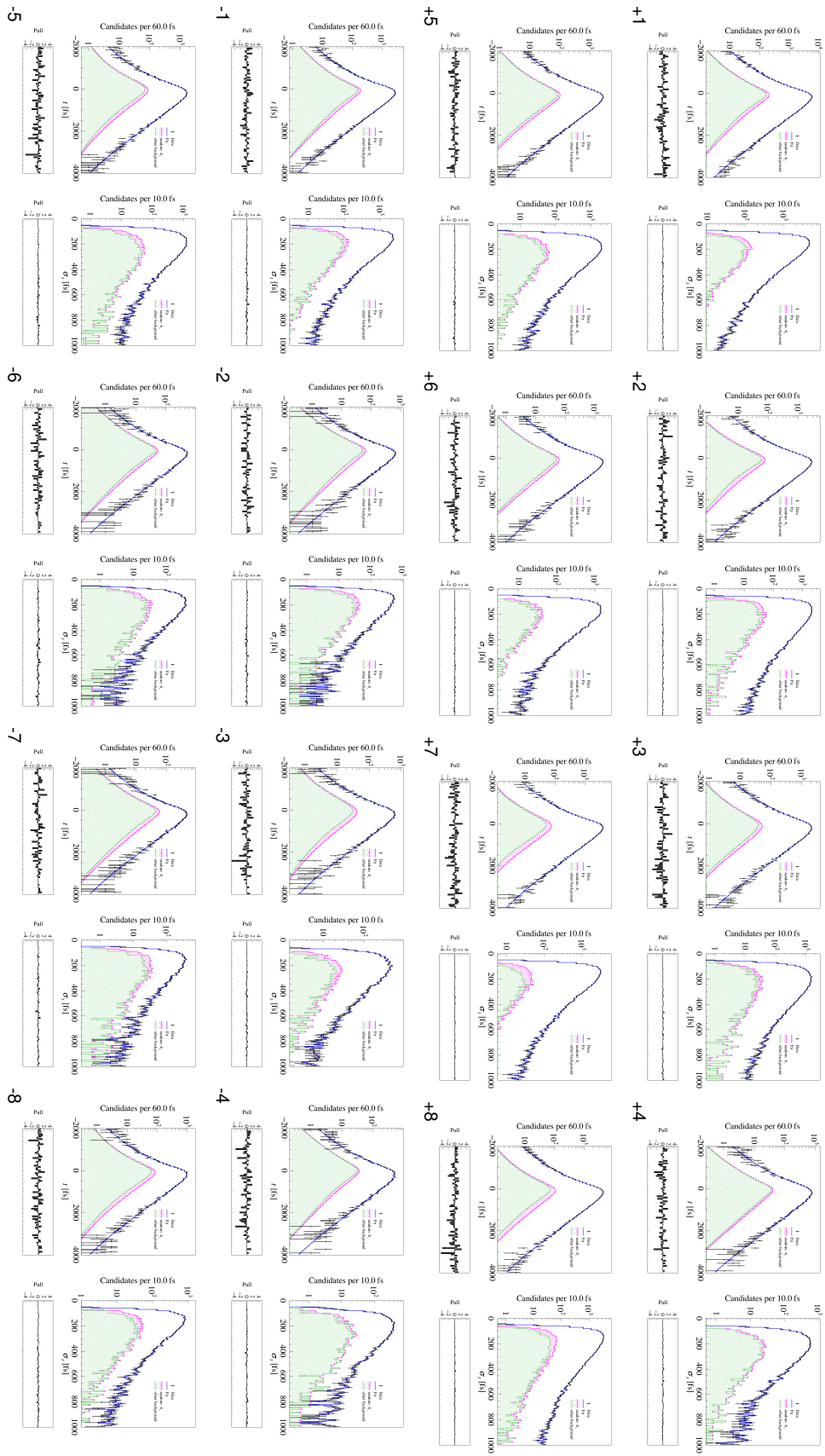

 图 B.61 Belle 和 Belle II 数据的舍时拟合结果 (Belle SVD1 $\Upsilon(4S)$, D^0 部分)。

Belle 和 Belle II 数据在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_i) 分布拟合结果 (Belle SVD1 $\Upsilon(4S)$, D^0 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

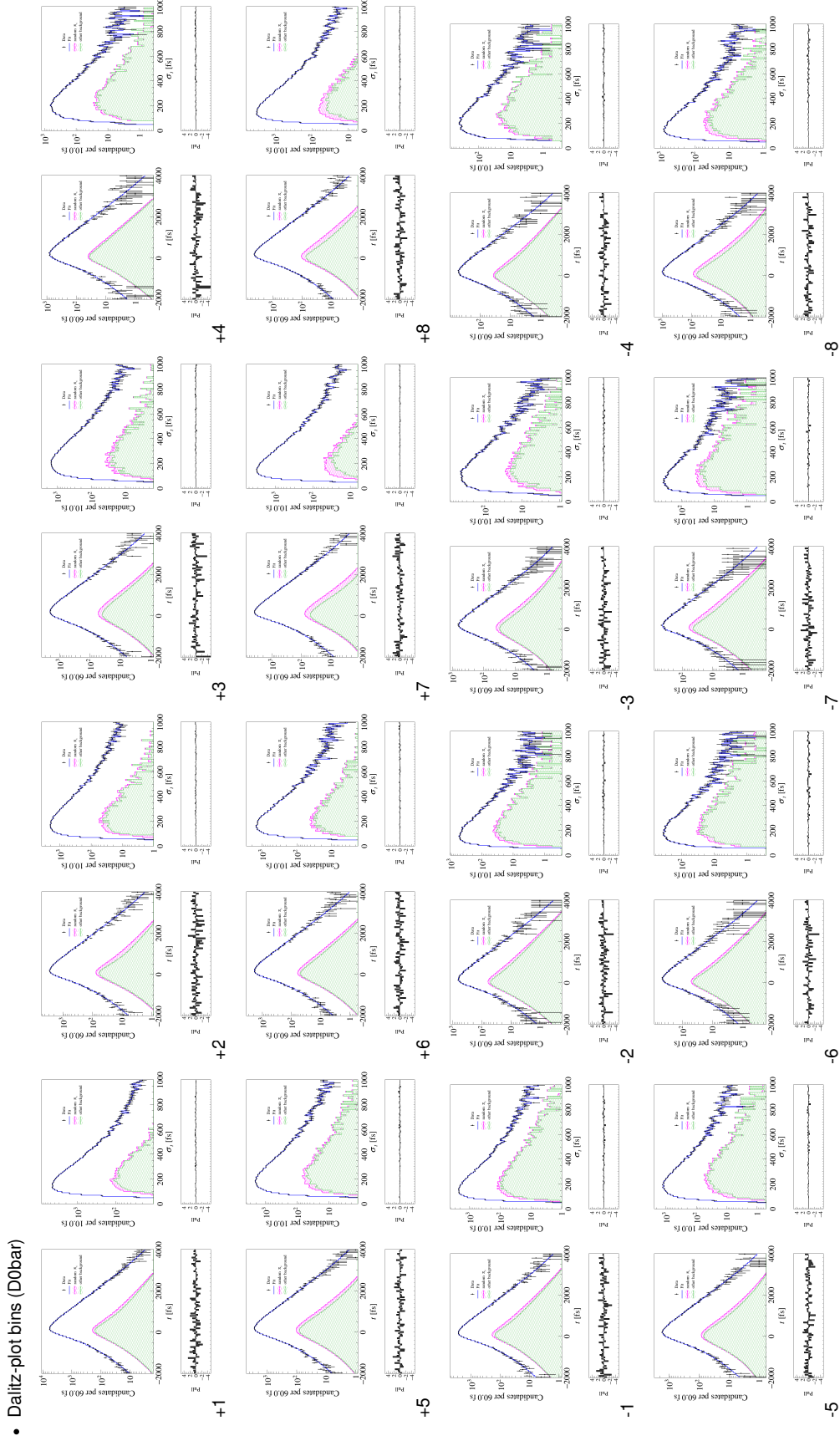

 图 B.62 Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle SVD1 $Y(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。

Belle 和 Belle II 数据在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_t) 分布拟合结果 (Belle SVD1 $Y(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

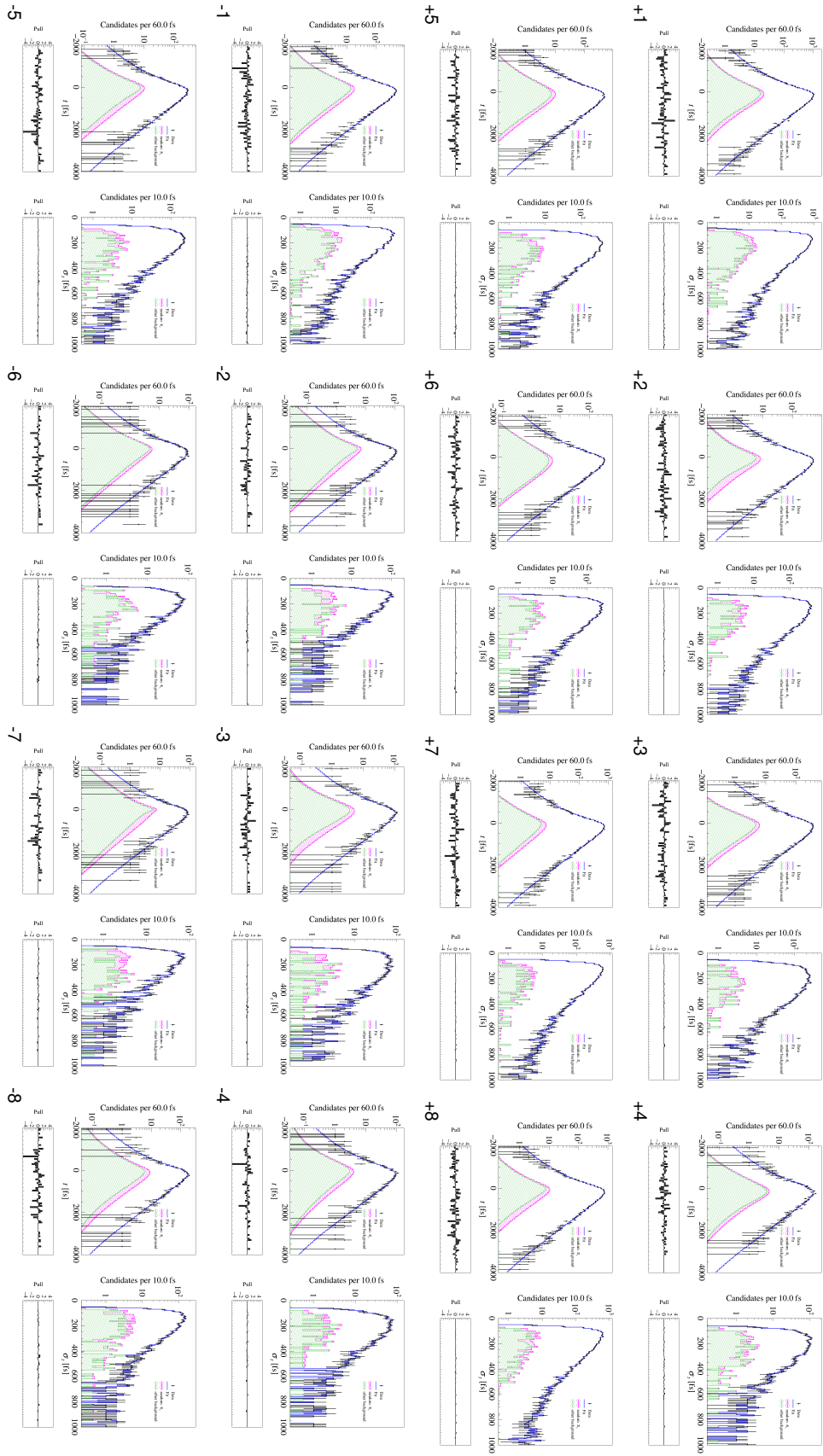
• Daltz-plot bins (D0)


 图 B.63 Belle 和 Belle II 数据的舍时拟合结果 (Belle SVD2 $\Upsilon(4S)$, D^0 部分)。

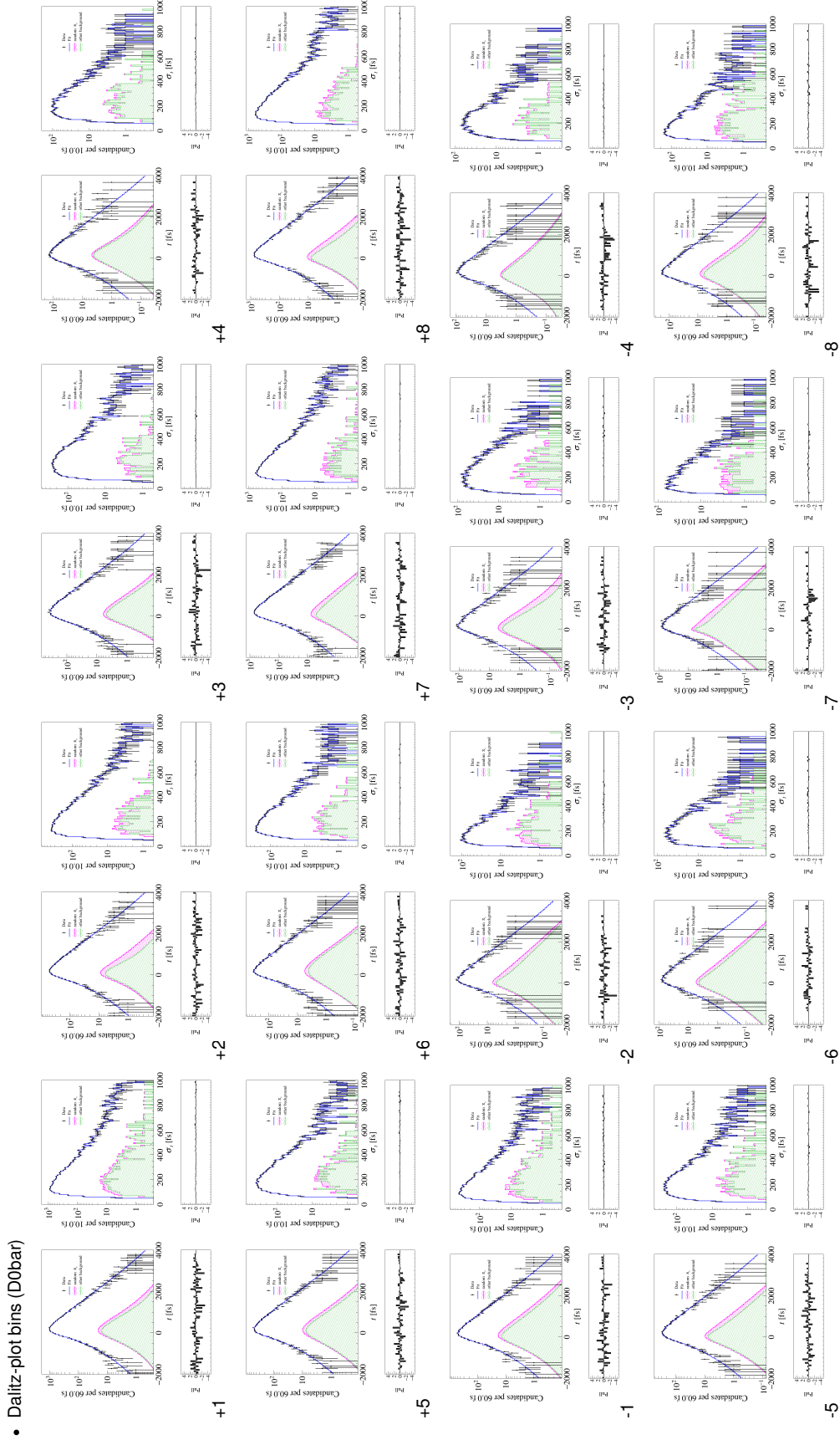
Belle 和 Belle II 数据在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_i) 分布拟合结果 (Belle SVD2 $\Upsilon(4S)$, D^0 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。


 图 B.64 Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。

Belle 和 Belle II 数据在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_i) 分布拟合结果 (Belle SVD2 $Y(4S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

• Dalitz-plot bins (D^0)

 图 B.65 Belle 和 Belle II 数据的舍时拟合结果 (Belle SVD2 $\Upsilon(5S)$, D^0 部分)。

Belle 和 Belle II 数据在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ_i) 分布拟合结果 (Belle SVD2 $\Upsilon(5S)$, D^0 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。


 图 B.66 Belle 和 Belle II 数据的含时拟合结果 (Belle SVD2 $Y(5S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。

Belle 和 Belle II 数据在达利兹区间 $+i$ 和 $-i$ 的 $M(D^0)\text{-}Q$ 信号区间的 (t, σ) 分布拟合结果 (Belle SVD2 $Y(5S)$, $\bar{D}^0$ 部分)。 $i = 1, \dots, 8$ 。

附录 C Σ^+ 和 Σ^0 有效电磁形状因子测量的补充材料

C.1 Trigger 效率的检查

Belle 实验的 trigger 系统在实际取数的过程中会压低 Bhabha 散射和辐射 Bhabha 散射的事例率。这两个过程的截面远远大于 Belle 实验感兴趣的物理过程^①。径迹数较多的事例在 Belle 探测器中的响应和前面这些事例相差较远，故几乎不会出现误判为前者的情况，其 trigger 效率接近 100%，误差可以忽略。少末态事例^②在探测器中的响应和 Bhabha 散射或辐射 Bhabha 散射相似，会被误判成后者，trigger 效率偏低。数据和 MC 模拟中的径迹和簇射不完全一致。这导致数据和 MC 中的 trigger 效率存在差别。 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 和 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 事例属于少末态事例。本工作通过控制样本检查这两个过程在数据和 MC 中的 trigger 效率。

Belle 实验的 trigger 系统根据多个 trigger bit^③的触发结果决定是否触发 DAQ 系统记录当前事例。Trigger bit 分成两类，第一类是 sub-trigger bit，用于代表较简单的触发条件，如表 C.1 中的 e_high，在 ECL 中的总能量大于 1.0 GeV 时被触发。第二类是 GDL bit (global decision logic)，为 sub-trigger bit 的组合，综合判断当前事例的类型。如表 C.1 中的 hie，须在 e_high 触发成功，csi_bb, csi_cosmic 和 veto35 触发失败时才能被触发。即要求当前事例在 ECL 中的总能量大于 1.0 GeV、并且不被识别为 bhabha 事例，宇宙线事例或束流注入本底事例 (见章节 7.3)。Trigger 系统根据所有启用的 GDL bit 的或逻辑，以及被成功触发的 GDL bit 中最小的压缩因子 (prescale value, PSV) 决定当前事例是否被 DAQ 记录。比如，若所有 GDL bit 中，只有 hadron_a 和 leo_clst3 为 1，其他 GDL bit 为零 0，此时总的 trigger 逻辑为 $(\text{hadron_a} || \text{leo_clst3} || 0) = 1$ 。hadron_a 的 PSV 为 1，leo_clst3 的 PSV 为 20，故 PSV 的最小值为 1，当前事例不用压缩，DAQ 系统直接记录当前事例。当所有的 GDL bit 中，只有 klm_tsc 和 leo_clst3 为 1，其他为 0，此时总的 trigger 逻辑为 $(\text{klm_tsc} || \text{leo_clst3} || 0) = 1$ 。klm_tsc 的 PSV 为 10，leo_clst3 的 PSV 为 20，故 PSV 的最小值为 10，当前事例需要压缩 10 倍，即 DAQ 系统按照 1/10 的概率记录当前事例。对于径迹数较多的事例，直接使用 trigger 系统的总逻辑即可。对于少末态事例，建议仅使用几个可靠的 trigger bit，以减少数据和 MC 的差别^[194]。

^① $\sqrt{s} = 10.58 \text{ GeV}$ 处， $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ ($q = u, d, s, c, b$) 和 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 的截面均在 1 nb 左右，而 Belle 探测器接收度范围内的 Bhabha 散射和辐射 Bhabha 散射截面可达 100 nb 量级，其中大部分来自 s, t, u 道中 t 道的贡献。

^② 少末态事例 (low multiplicity event) 一般指末态较少的事例。对于 Belle 实验，可以认为末态径迹数少于等于 4 的事例为少末态事例。

^③ 不同触发条件在 trigger 系统中，用二进制数字中不同的位 (bit) 来表示。1 代表触发成功，0 代表触发失败。

定义某个 GDL bit 在控制样本中的效率为：

$$\epsilon = \frac{\text{控制样本中成功触发这个 GDL bit 的事例数}}{\text{控制样本的总事例数}} . \quad (\text{C.1})$$

此处控制样本由成功触发另一个 GDL bit^①的事例组成。控制样本中的事例还应通过 $e^+e^- \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$ 的事例选择^②。由于实验数据中通过全部事例选择的事例很少，在选择控制样本时，仅要求事例通过径迹的选择，并要求探测 ISR 光子。将多个控制样本中的 GDL bit 效率组合，作为最终的 GDL bit 效率。在数据和 MC 中分别定义

$$\text{eff}(\text{Data}) = \sum_i w_i \times \epsilon_i(\text{Data}) , \quad (\text{C.2})$$

$$\text{eff}(\text{MC}) = \sum_i w_i \times \epsilon_i(\text{MC}) , \quad (\text{C.3})$$

i 代表不同的控制样本， $\epsilon_i(\text{Data})$ ($\epsilon_i(\text{MC})$) 是实验数据 (MC) 中控制样本 i 的 GDL bit 效率 (式 C.1)。 $w_i = N_i / \sum_i N_i$ 是用事例数比例定义的控制样本 i 的权重。定义实验数据中 GDL bit 效率的误差为控制样本的统计误差和数据与 MC 的差别的组合

$$\sigma_{\text{trigger}} = \sqrt{\sigma_{\text{stat}}^2(\text{Data}) + \sigma_{\text{diff}}^2} , \quad (\text{C.4})$$

其中

$$\sigma_{\text{stat}} = \sqrt{\sum_i w_i \times \sigma_{i \text{ stat}}^2(\text{Data})} , \quad (\text{C.5})$$

$$\sigma_{\text{diff}} = \sqrt{\sum_i w_i \times (\epsilon_i(\text{Data}) - \epsilon_i(\text{MC}))^2} , \quad (\text{C.6})$$

$\sigma_{i \text{ stat}}(\text{Data})$ 为根据二项分布^③求得的 $\epsilon_i(\text{Data})$ 的误差。以上公式也适用于对多个 GDL bit 的组合的效率检查。

C.1.1 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 过程的 trigger 效率检查

(1) 对 hie 的检查

hie (GDL bit 16) 也称为 ECL 高能触发 (ECL high energy trigger)。如表 C.1 所示，hie 须在 e_high 触发成功，csi_bb, csi_cosmic 和 veto35 触发失败时才能被触

^①统计量允许时，用于选择控制样本的 GDL bit 应尽量在条件上和被研究的 GDL bit 不同。

^②还有一种做法是将参考过程的事例选为控制样本。比如在研究 $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ 时，选 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 事例为控制样本。

^③设效率 $\epsilon = k/n$ ， k 为通过某条件的事例数， n 为样本的总事例数。由于 k 和 n 有关联性，故误差 $\sigma(\epsilon) \neq \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2(k) + \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \sigma^2(n)}$ 。 k 近似服从二项分布 $B(n, \epsilon)$ ，则 k 的方差 $\sigma^2(k) = n\epsilon(1 - \epsilon)$ ， $\sigma(\epsilon) = \sqrt{(\epsilon(1 - \epsilon))/n}$ 。

表 C.1 Trigger bit 的定义^[195]。

sub-trigger bits			
bit	name (mnemonic)	delay	description
2	ncdr_short0	12	first bit of the number of CDC R- ϕ short tracks; short track $\equiv$ track segments in 3 inner trigger superlayers; short track includes full track
3	ncdr_short1	12	second bit of the number of CDC - ϕ short tracks
4	ncdr_short2	12	third bit of the number of CDC - ϕ short tracks
6	cdc_open	12	opening angle cut ($>135^\circ$)
14	tsc_gel	56	number of TSC hits ≥ 1
13	tsc_pat	56	TOF hit pattern (1-3 back to back)
18	e_high	4	ECL high energy trigger (>1.0 GeV)
19	e_low	4	ECL low energy trigger (>0.5 GeV)
21	csi_bb	0	ECL Bhabha veto trigger
23	nicl0	0	first bit of the number of isolated clusters on ECL
24	nicl1	0	second bit of the number of isolated clusters on ECL
25	nicl2	0	third bit of the number of isolated clusters on ECL
26	nicl3	0	fourth bit of the number of isolated clusters on ECL
27	csi_cosmic	0	ECL cosmic veto trigger
92	iveto35	0	Injection Veto35
GDL(Global Decision Logic) bits			
bit	name (mnemonic)	pre-scale (PSV)	description
16	hie	1	$e_high \& !csi_bb \& !csi_cosmic \& (!iveto35)$
17	clst4	1	$(nicl > 3) \& !csi_cosmic \& (!iveto35)$
19	loe_clst3	20	$e_low \& (nicl > 2) \& !csi_cosmic \& (!iveto35)$
24	hadron_a	1	$(ncdr_short > 2) \& e_low \& (nicl > 1) \& tsc_gel$ $\& (!iveto35)$
27	loe_fs_o	1	$e_low \& (ncdr_short > 1) \& (ncdr_full > 0)$ $\& cdc_open \& !csi_bb \& (!iveto35)$
28	loe_fs_to	1	$e_low \& (ncdr_short > 1) \& (ncdr_full > 0)$ $\& tsc_gel \& cdc_open \& !csi_bb \& (!iveto35)$
40	csi_bhabha	50	$csi_bb \& (!iveto35)$
52	klm_tsc	10	$tsc_pat \& klm_br$
57	klm_opn	1	$cdc_open \& klm_br$

发^①。即要求当前事例在 ECL 中的总能量大于 1.0 GeV，并且不被识别为 bhabha 事例、宇宙线事例或束流注入本底事例 (见章节 7.3)。ISR 光子会在 ECL 中沉积大量能量，所有 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 事例都能触发 e_high。csi_cosmic 和 veto35 几乎不误判 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 事例，后续讨论忽略这两个 sub-trigger。csi_bb^[194,196] 有一定概率将 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 事例误判为 Bhabha 事例。csi_bb 的触发需要两个条件^[196]：第一，被击中的 ECL 接近背对背分布，这个判断由模式匹配完成；第二，ECL 中的总能量要超过一个阈值。大多数情况下，这个阈值为 5 GeV。部分 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 事例同时满足这两个条件，会被误判成 Bhabha 事例。质子和反质子在晶体里沉积能量很难精确模拟。故第二个条件中的 ECL 能量阈值，会

^①排除 Bhabha 事例的逻辑，如!csi_bb 在 Belle 和 Belle II 的文档中被称为 Bhabha veto。

导致数据和 MC 中的误判率不一样。Belle 实验在测量 $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ 过程的形状因子^[194]时用了以下的方法检查数据和 MC 中 `csi_bb` 的效率。定义一个变量

$$x = \frac{N_{\text{hie}}}{N_{\text{hie}} + 50 \times N_{\text{csi_bhabha}}} ,$$

N_{hie} 是探测到 ISR 光子, 通过径迹粗选并触发 `hie` 的事例数; $N_{\text{csi_bhabha}}$ 是探测到 ISR 光子, 通过径迹粗选并触发 `csi_bhabha` 的事例数。如表 C.1, `hie` 不含有触发 `csi_bb` 的事例, 而 `csi_bhabha` 随机抽取了 1/50 成功触发 `csi_bb` 的事例。故 $N_{\text{hie}} + 50 \times N_{\text{csi_bhabha}}$ 可以用于近似 `csi_bb` 判选前样本中的事例数。而 x 表示, 在这个没有被 `csi_bb` 判选的样本中, 触发 `hie` 的事例的占比。文献^[194]用数据和 MC 中的 x 之比研究 `hie` 的可靠性。文献^[194]得到的比值在 0.8 到 1.2 之间随转移动量的平方浮动。 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 样本的统计量较少, 直接估算平均比值。平均比值在 0.7 左右 (表 C.2)。这个值说明, 根据这种方法估算出来的 `hie` 效率在数据和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ MC 中的差别在 30% 左右。可能有两个因素导致如此大的差别, 第一, 正反质子在晶体中响应的模拟不准确对 `hie` 效率计算的影响很大; 第二, 由于数据中成功重建的 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 统计量太小, 放宽了控制样本的选择条件, 从而混入了本底, `hie` 对这些本底的触发效率和对信号的触发效率相差非常大。此外, 还用 `hadron_a` 选出了控制样本, 对比在数据和 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ MC 中的 ϵ 。如表 C.2 所示, 数据中的 ϵ 是 $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ MC 中的 ϵ 的 2.8 倍。即, 改变了控制样本后数据中的 `hie` 估算效率变化了 4 倍。这说明第二个因素 (本底) 的影响非常大。无论 `hie` 本身是否可靠, 如果没有足够大、足够干净的数据控制样本, 将无法可靠地研究 `hie`。`hie` 效率在不同控制样本的效率差别较大的原因是 `hie` 中的 `csi_bb` 对不同本底过程的效率差别较大。后续研究不使用任何含有 `csi_bb` 的 GDL bit。

(2) clst4

`clst4` (GDL bit 17) 也称为四簇射触发 (four cluster trigger)。如表 C.1, `clst4` 须在 `nicl` 大于 3, `csi_cosmic` 和 `veto35` 触发失败时才能被触发。即 `clst4` 要求 ECL 中至少有 4 处簇射^①。分别用 `loe_clst3` (GDL bit 19), `hadron_a` (GDL bit 24), `loe_fs_to` (GDL bit 28) 和 `klm_opn` (GDL bit 57) 选出控制样本, 并计算样本中的 ϵ , 如表 C.2。`clst4` 的数据 MC 差异约为 5%。

(3) hadron_a

`hadron_a` (GDL bit 24) 也称为 A 类强子触发 (hadronic trigger A)。如表 C.1, `hadron_a` 须在 `ncdr_short` 大于 2, `e_low` 触发成功, `nicl` 大于 1, `tsc_gel` 触发成功, `veto35` 触发失败时才能被触发。即 `hadron_a` 要求, CDC 中至少有 3 条径迹, ECL

^① $e^+e^- \rightarrow \gamma_{\text{ISR}}\Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ 末态中的 ISR 光子, 来自 $\Sigma^0/\bar{\Sigma}^0$ 的光子和正反质子, 有概率在 ECL 中产生 4 处或 5 处簇射。

总能量大于 0.5 GeV, ECL 中至少有 2 处簇射, TSC 模块至少有 1 处击中。分别用 hie(GDL bit 16), clst4(GDL bit 17) 和 leo_clst3(GDL bit 19) 选出控制样本, 并计算样本中的 ϵ , 如表 C.2。数据和 MC 差异较大。

(4) (hadron_a || clst4)

检查组合逻辑 (hadron_a || clst4) 的 trigger 效率。分别用 hie(GDL bit 16), loe_clst3(GDL bit 19), loe_fs_to(GDL bit 28) 和 klm_tsc(GDL bit 52) 选出控制样本, 并计算样本中的 ϵ , 如表 C.2。根据式 C.2 和式 C.3, $\text{eff(Data)} = 0.9465\%$, $\text{eff(MC)} = 0.9473\%$, $\text{eff(Data)}/\text{eff(MC)} = 99.9\%$ 。考虑数据和 MC 的差别后, trigger 效率为 $95 \pm 2\%$, 即来自 trigger 的系统误差约为 3%。正式的数据分析使用的 trigger 条件为 (hadron_a || clst4)。

表 C.2 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^0$ 过程控制样本的 trigger 效率。

表达式	数据	MC
$\frac{N_{\text{hie(bit16)}}}{N_{\text{hie(bit16)}} + 50 \times N_{\text{csi_bhabha(bit40)}}}$	$\frac{805}{7605} = 0.1059$	$\frac{9585}{66935} = 0.1432$
$\frac{N(\text{bit16(HiE)} \&\& \text{bit24})}{N(\text{bit24})}$	$\frac{606}{1494} = 0.4056$	$\frac{4040}{28144} = 0.1435$
$\frac{N(\text{bit17} \&\& \text{bit19})}{N(\text{bit19})}$	$\frac{94}{115} = 0.8174$	$\frac{2613}{3190} = 0.8191$
$\frac{N(\text{bit17} \&\& \text{bit24})}{N(\text{bit24})}$	$\frac{1220}{1494} = 0.8166$	$\frac{21585}{28144} = 0.7670$
$\frac{N(\text{bit17} \&\& \text{bit28})}{N(\text{bit28})}$	$\frac{353}{378} = 0.9339$	$\frac{147}{170} = 0.8647$
$\frac{N(\text{bit17} \&\& \text{bit57})}{N(\text{bit57})}$	$\frac{128}{158} = 0.8101$	$\frac{891}{1193} = 0.7469$
$\frac{N(\text{bit24} \&\& \text{bit16})}{N(\text{bit16})}$	$\frac{606}{805} = 0.7528$	$\frac{4040}{9585} = 0.4215$
$\frac{N(\text{bit24} \&\& \text{bit17})}{N(\text{bit17})}$	$\frac{1220}{1687} = 0.7232$	$\frac{21585}{53061} = 0.4068$
$\frac{N(\text{bit24} \&\& \text{bit19})}{N(\text{bit19})}$	$\frac{78}{115} = 0.6783$	$\frac{1291}{3190} = 0.4047$
$\frac{N((\text{bit17} \text{bit24}) \&\& \text{bit16})}{N(\text{bit16})}$	$\frac{757}{805} = 0.940373$	$\frac{9233}{9585} = 0.963276$
$\frac{N((\text{bit17} \text{bit24}) \&\& \text{bit19})}{N(\text{bit19})}$	$\frac{103}{115} = 0.895652$	$\frac{2870}{3190} = 0.899687$
$\frac{N((\text{bit17} \text{bit24}) \&\& \text{bit28})}{N(\text{bit28})}$	$\frac{369}{378} = 0.97619$	$\frac{168}{170} = 0.988235$
$\frac{N((\text{bit17} \text{bit24}) \&\& \text{bit52})}{N(\text{bit52})}$	$\frac{10}{11} = 0.909091$	$\frac{386}{416} = 0.927885$

C.1.2 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 过程的 trigger 效率检查

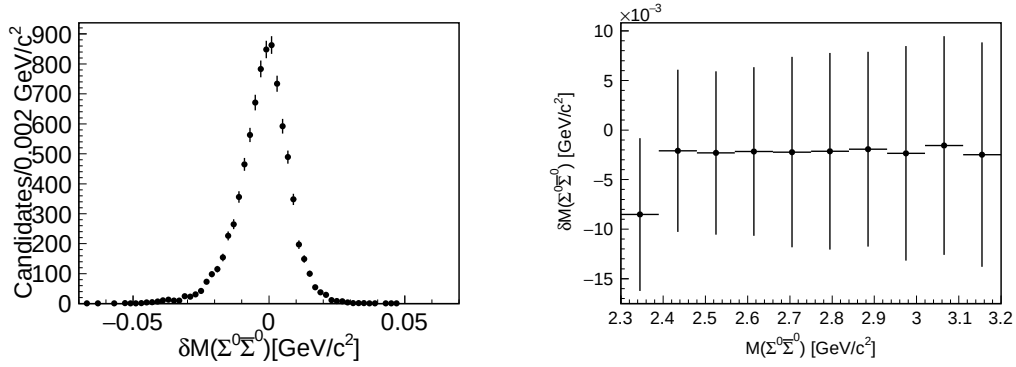
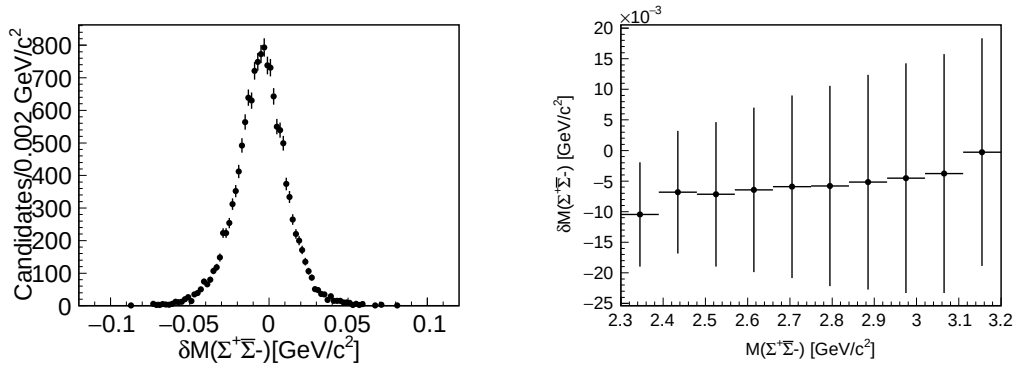
$e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的分析使用了 clst4。ISR 光子和来自两个 π^0 的 4 个光子, 会在 ECL 中产生 5 处簇射。分别用 loe_clst3(GDL bit 19), hadron_a(GDL bit 24) 和 klm_opn(GDL bit 57) 选控制样本, 并计算样本中的 ϵ , 如表 C.2。根据式 C.2 和式 C.3, $\text{eff(Data)} = 0.8961\%$, $\text{eff(MC)} = 0.8900\%$, $\text{eff(Data)}/\text{eff(MC)} = 100.7\%$ 。考虑数据和 MC 的差别后, trigger 效率为 $89.6 \pm 4.2\%$, 即来自 trigger 的系统误差约为 5%。

表 C.3 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 过程控制样本的 trigger 效率。

Value	Data	MC
$\frac{N(\text{bit17} \ \&\& \ \text{bit19})}{N(\text{bit19})}$	$\frac{632}{690} = 0.9159$	$\frac{4451}{4992} = 0.8916$
$\frac{N(\text{bit17} \ \&\& \ \text{bit24})}{N(\text{bit24})}$	$\frac{5649}{6181} = 0.9139$	$\frac{4290}{4827} = 0.8888$
$\frac{N(\text{bit17} \ \&\& \ \text{bit57})}{N(\text{bit57})}$	$\frac{977}{1228} = 0.7956$	$\frac{271}{307} = 0.8827$

C.2 $\Sigma \bar{\Sigma}$ 不变质量分辨率和偏差值的检查

$M(\Sigma \bar{\Sigma})$ 的分辨率可通过产生子水平和重建水平的 $M(\Sigma \bar{\Sigma})$ 之差, $\delta M(\Sigma \bar{\Sigma}) = M_{\text{recon}}(\Sigma \bar{\Sigma}) - M_{\text{truth}}(\Sigma \bar{\Sigma})$ 的分布来研究。图 C.1 和图 C.2 为信号 MC 中 $\delta M(\Sigma \bar{\Sigma})$ 的分布图, 和其轮廓图 (profile)。轮廓图中点的横向误差表示一个 $M(\Sigma \bar{\Sigma})$ 区间, 点的中心值表示 $\delta M(\Sigma \bar{\Sigma})$ 分布在这个区间的平均值, 点的纵向误差表示 $\delta M(\Sigma \bar{\Sigma})$ 分布在这个区间的均方根。此处的平均值近似为 $M(\Sigma \bar{\Sigma})$ 的偏移, 均方根近似等于 $M(\Sigma \bar{\Sigma})$ 的分辨率。由于 $\delta M(\Sigma \bar{\Sigma})$ 的分布不是对称的, 其平局值均稍比零小。这种不对称的分布可能来自光子能量分辨的不对称分布。从 $\Sigma \bar{\Sigma}$ 阈值到 $3.2 \text{ GeV}/c^2$, $M(\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0)$ ($M(\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-)$) 的分辨逐渐由 $8 \text{ MeV}/c^2$ ($8 \text{ MeV}/c^2$) 增加至 $10 \text{ MeV}/c^2$ ($18 \text{ MeV}/c^2$)。

图 C.1 信号 MC 中的 $\delta M(\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0)$ 分布 (左) 和其轮廓图 (右)。图 C.2 信号 MC 中的 $\delta M(\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-)$ 分布 (左) 和其轮廓图 (右)。

定义一个新的量 $M_{\Sigma \bar{\Sigma}} = M_{\text{recon}}(\Sigma \bar{\Sigma}) - M_{\text{recon}}(\Sigma) - M_{\text{recon}}(\bar{\Sigma}) + 2m_{\Sigma}$, 以

提升分辨率^①。其中， m_Σ 为 Σ 质量的 PDG 值^[10]。 $M_{\Sigma\bar{\Sigma}}$ 与产生子水平 $\Sigma\bar{\Sigma}$ 不变质量的差值为 $\delta(M_{\Sigma\bar{\Sigma}}) = M_{\Sigma\bar{\Sigma}} - M_{truth}(\Sigma\bar{\Sigma})$ 。图 C.3 和图 C.4 为这个差值的分布和其轮廓图。从产生阈值到 $3.2 \text{ GeV}/c^2$ ， $M_{\Sigma^0\bar{\Sigma}^0}$ ($M_{\Sigma^+\bar{\Sigma}^-}$) 的分辨率逐渐从 $4 \text{ MeV}/c^2$ ($3 \text{ MeV}/c^2$) 增加到 $8 \text{ MeV}/c^2$ ($16 \text{ MeV}/c^2$)。 $M_{\Sigma^0\bar{\Sigma}^0}$ 和 $M_{\Sigma^+\bar{\Sigma}^-}$ 的偏移从阈值到 $3 \text{ GeV}/c^2$ 区间都小于 $2 \text{ MeV}/c^2$ 。

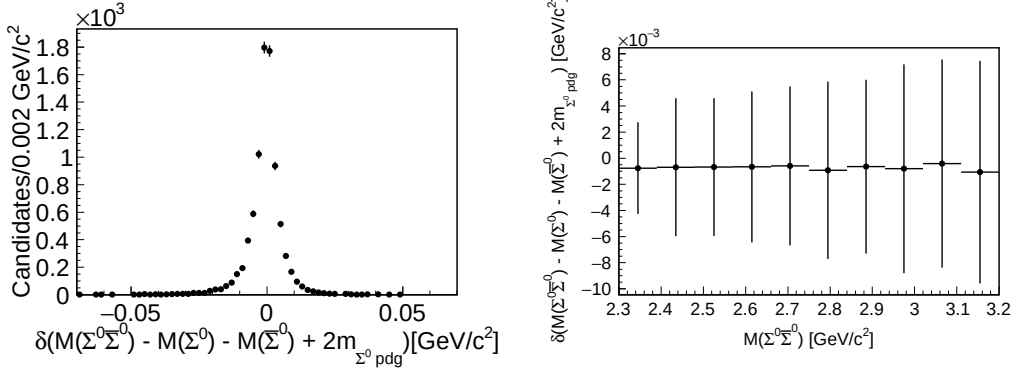


图 C.3 信号 MC 中的 $\delta M_{\Sigma^0\bar{\Sigma}^0}$ 分布 (左) 和其轮廓图 (右)。

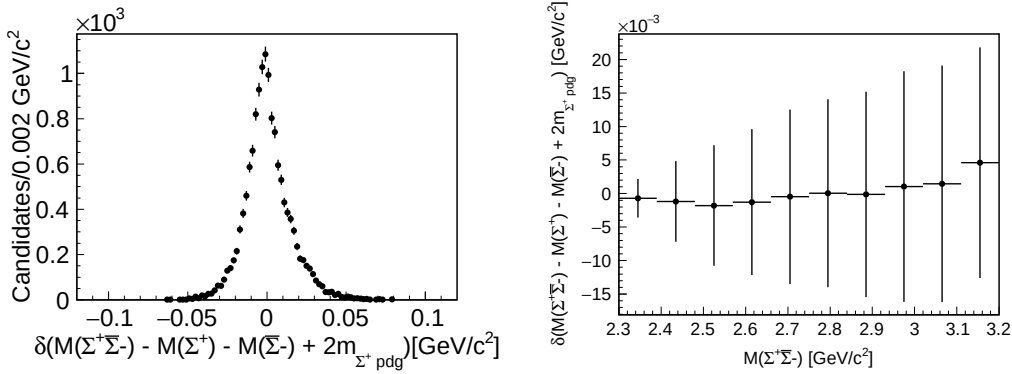


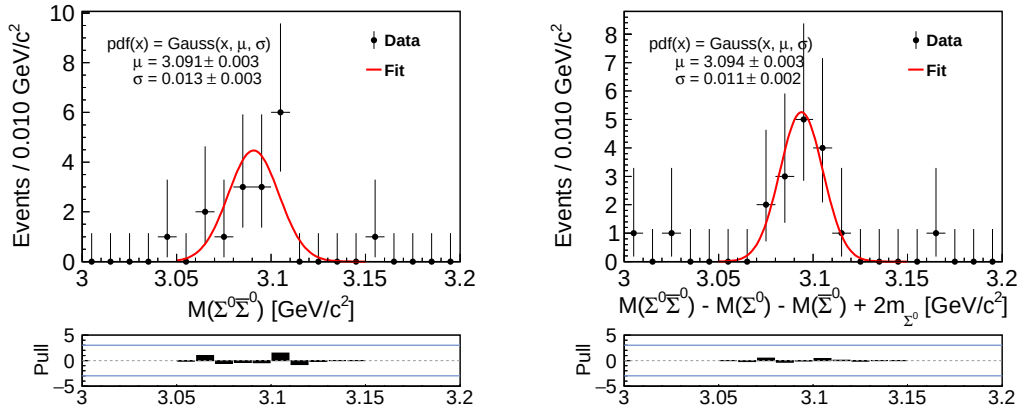
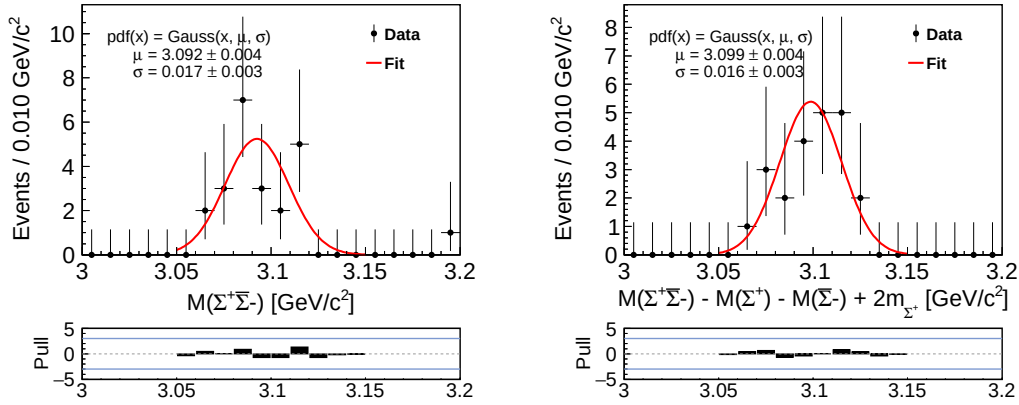
图 C.4 信号 MC 中的 $\delta M_{\Sigma^+\bar{\Sigma}^-}$ 分布 (左) 和其轮廓图 (右)。

以上的分辨率检查均基于信号 MC。本工作基于实验数据中的 $J/\psi \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$ 样本研究了在 $3.1 \text{ GeV}/c^2$ 附近，实验数据的分辨率。选取 $3.05 - 3.15 \text{ GeV}/c^2$ 的数据并用单高斯函数拟合 J/ψ 共振峰。考虑到本底统计量非常低，拟合过程忽略本底。拟合结果如图 C.5 和 C.6 所示。拟合得到的宽度和上文轮廓图中， $3.1 \text{ GeV}/c^2$ 附近的均方根一致。

C.3 束团对撞时间 (T_0) 误匹配的检查

飞行时间探测器 (TOF)^[197] 通过对比根据粒子类型预测的粒子飞行时间 $T_{expected}$ ，与实际测得的粒子的飞行时间 $T_{measured}$ ，为粒子鉴别系统 (PID) 提供信息。 $T_{expected}$ 由 CDC 测得的径迹长度和动量，以及粒子的质量假设得出。

^①这种定义方法可抵消部分 $M(\Sigma)$ 和 $M(\bar{\Sigma})$ 分辨的贡献


 图 C.5 实验数据中 $J/\psi \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 共振峰的拟合结果。

 图 C.6 实验数据中 $J/\psi \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 共振峰的拟合结果。

$T_{measured} = T_{tof} - T_0$ ，为粒子击中 TOF 的时间和束团对撞时间 T_0 的差。束团对撞时间 T_0 又由 KEKB 对撞机的射频时钟和 TOF 的时钟信号共同决定。粒子击中 TOF 后，TOF 系统可以知道这个粒子在哪个 TOF 时钟周期到达 TOF。TOF 的时钟周期为 16 ns，约为 KEKB 射频时钟周期的 8 倍。故 TOF 系统可以知道这个粒子可能来自哪 9 个束团，而粒子具体来自 9 个束团中的哪一个束团要依靠后续的离线分析^[46,197-198]。离线分析通过令事例中所有径迹中 δt 最小者的 δt 最小的方式确定束团编号 N_0 。即，利用事例中飞行速度最快的粒子的信息确定当前事例对应的束团。定义

$$\delta t = T_{measured} + \frac{N_0}{f_b} - T_{expected} \quad ,$$

f_b ($= 508.9$ MHz) 是 KEKB 的射频时钟频率，同时也是束团的频率。两个束团的时间间隔 $1/f_b \approx 2$ ns。寻找 δt 最小值时， N_0 可取 0 到 8 之间的整数， $T_{expected}$ 可取所有质量假设的计算结果。当事例中存在高速度的带电粒子时，这种方法可以很好地确定 T_0 。当事例中没有高速带电粒子时，这种方法可能给出错误的 N_0 ，

这种情况称为 T_0 误匹配^[198-199]。此时，改变粒子假设带来的 $T_{expected}$ 的变化与 $1/f_b$ 在同一量级。

在 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的末态中仅有两条带电径迹 p 和 $\bar{p}$ 。它们的速度可能偏低，可能存在 T_0 误匹配的情况。图 C.7 是 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 样本中 $T_{measured} - T_{expected}$ 随 (反) 质子动量的变化趋势。由于实验数据样本中，事例数较少。放宽选择条件，得图 C.8。图中 $T_{measured} - T_{expected} = 0$ 的水平带状分布为 (反) 质子信号。当存在 T_0 误匹配时，在 $T_{measured} - T_{expected} \neq 0$ 处也会出现水平带状分布。图 C.7 和图 C.8 中很难找到这样的分布。在图 C.8 中 $T_{measured} - T_{expected}$ 约为 -2 或 -6 处，有不清晰的条带。其事例数为总事例数的 2% 以下。本工作忽略这部分事例的影响。根据基于 $\gamma\gamma \rightarrow p\bar{p}$ 样本的研究^[198-199]，当事例中正反质子的动量都小于 1.3 GeV 时，事例的 T_0 可能被误匹配。图 C.9 是 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 过程的质子动量和反质子动量的二维分布。大部分事例的质子或反质子的动量大于 1.3 GeV/c。这也解释了为什么在 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 的样本中很难找到 T_0 误匹配的事例。此外，还检查了在 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 过程中的 T_0 误匹配。如图 C.10-C.12 所示， T_0 误匹配对 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 过程的影响很小。

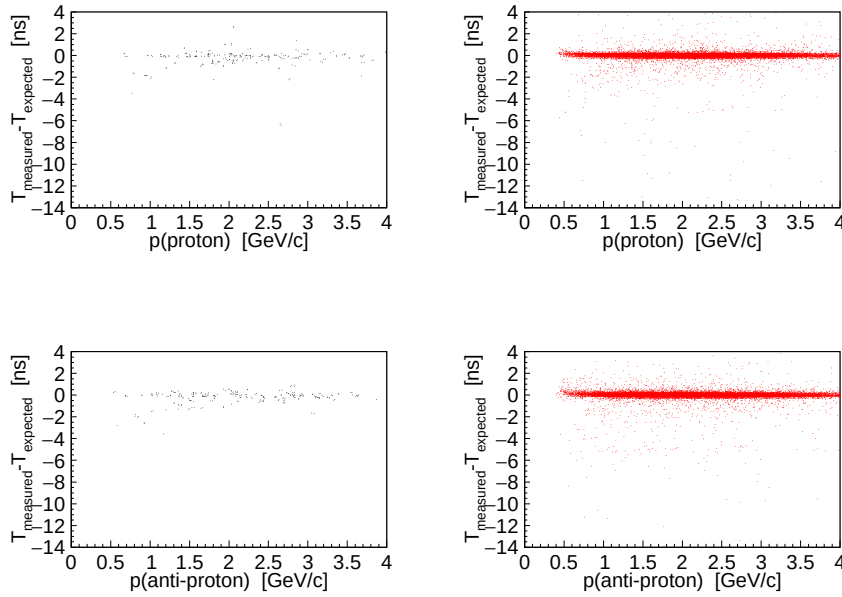


图 C.7 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 样本中 $T_{measured} - T_{expected}$ 随 (反) 质子动量的变化趋势。

左图为实验数据右图为信号 MC。左图中弯曲的带状分布为本底。

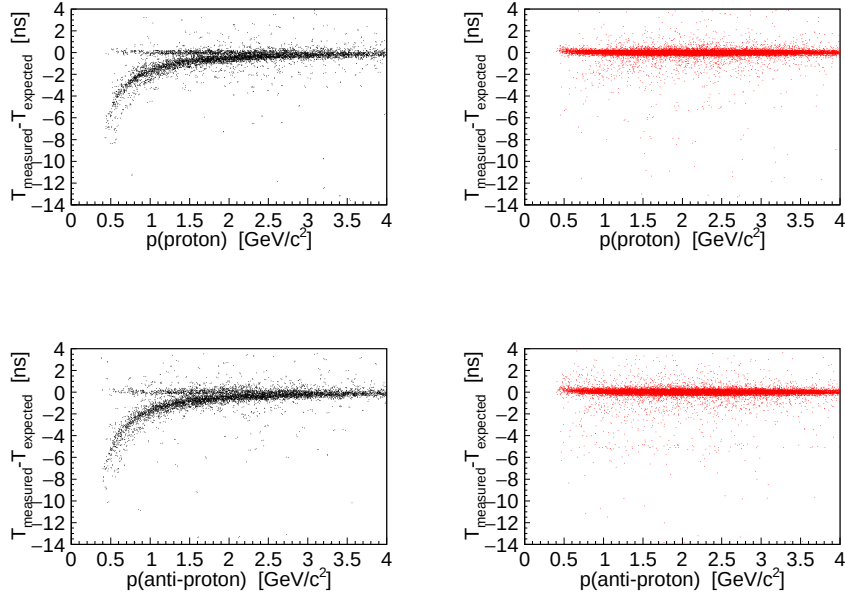


图 C.8 放宽选择条件后, $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 样本中 $T_{measured} - T_{expected}$ 随(反)质子动量的变化趋势。

左图为实验数据右图为信号 MC。左图中弯曲的带状分布为本底。

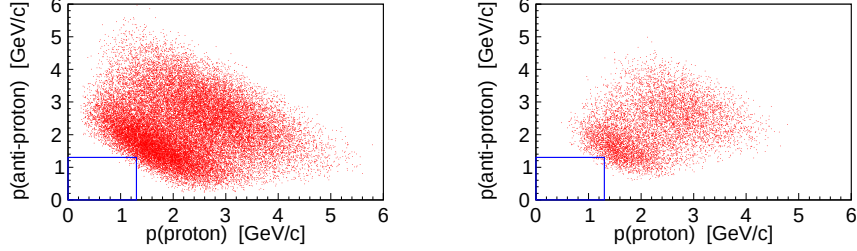


图 C.9 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^+ \bar{\Sigma}^-$ 信号 MC 中质子与反质子动量的二维分布图。

左图要求 $M(\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-) < 3.2 \text{ GeV}/c^2$, 右图要求 $M(\Sigma^+ \bar{\Sigma}^-) < 2.6 \text{ GeV}/c^2$ 。质子与反质子的动量均小于 $1.3 \text{ GeV}/c$ 的区间用蓝色正方形标出。

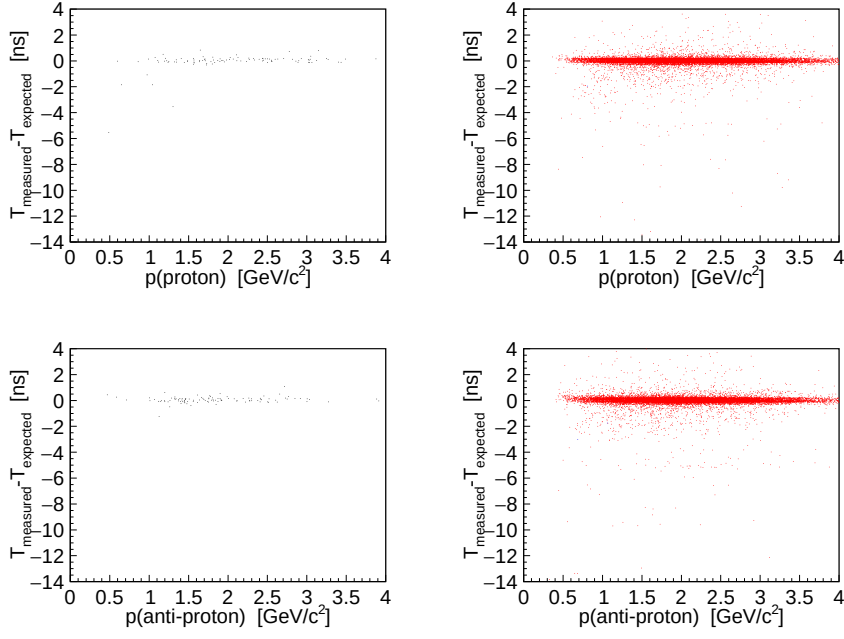


图 C.10 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 样本中 $T_{measured} - T_{expected}$ 随 (反) 质子动量的变化趋势。

左图为实验数据右图为信号 MC。左图中弯曲的带状分布为本底。

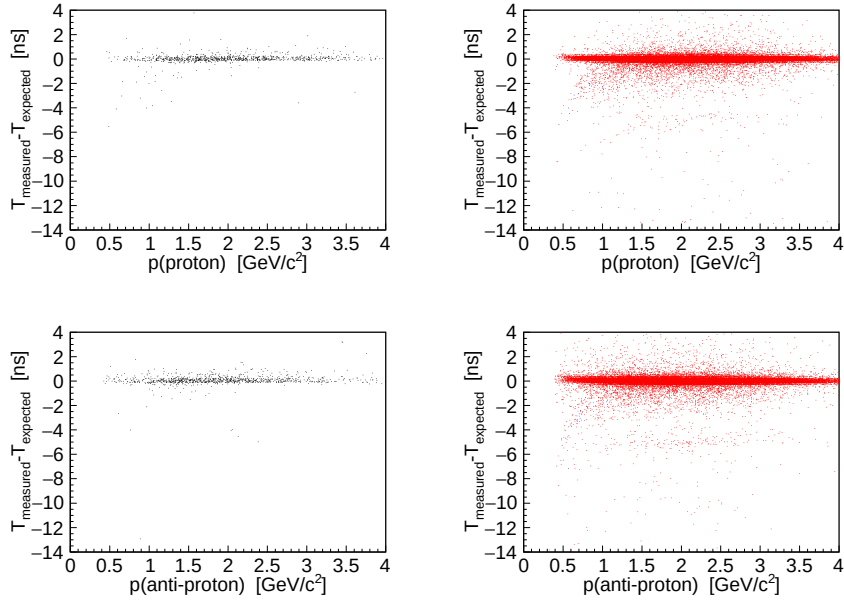


图 C.11 放宽选择条件后, $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 样本中 $T_{measured} - T_{expected}$ 随 (反) 质子动量的变化趋势。

左图为实验数据右图为信号 MC。左图中弯曲的带状分布为本底。

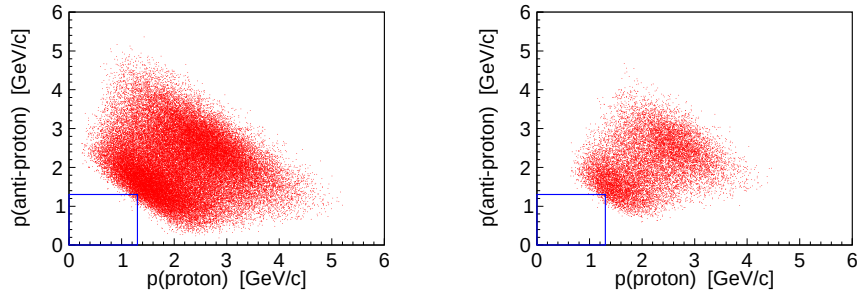


图 C.12 $e^+e^- \rightarrow \gamma_{ISR} \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$ 信号 MC 中质子与反质子动量的二维分布图。

左图要求 $M(\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0) < 3.2 \text{ GeV}c^2$ ，右图要求 $M(\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0) < 2.6 \text{ GeV}c^2$ 。质子与反质子的动量均小于 $1.3 \text{ GeV}c$ 的区间用蓝色正方形标出。

附录 D ISR 分析的事例选择方法

用 ISR 事例 $e^+e^- \rightarrow X + (\gamma_{\text{ISR}})$ 研究 $e^+e^- \rightarrow X$ 过程, 称为初态辐射方法。初态辐射方法起源于电子质子对撞实验中用辐射事例测量结构函数的工作^[200-201]。1998 年, 有人提议在正负电子对撞实验上用初态辐射事例测量 R 值^[150,202]。随后, KLOE 实验、BaBar 实验、Belle 实验和 BESIII 实验用初态辐射方法取得了丰富的物理结果。这些结果涵盖 R 值的测量、轻强子谱的测量、重子电磁形状因子的测量、 J/ψ 和 $\psi(2S)$ 衰变的研究、粲夸克奇特态的研究等。ISR 工作的综述和总结可见文献^[46,203]。ISR 工作中所使用的事例选择方法分为以下几类:

- **反冲光子的反冲质量法:** 即计算除 ISR 光子以外, 所有末态粒子的反冲质量, 根据反冲质量谱选择信号事例。由四动量守恒可知, 在不考虑探测器分辨率和多光子初态辐射的情况下, 该反冲质量等于光子的质量。信号事例的反冲质量谱应集中于零附近。使用这种方法时, 可以不标记 ISR 光子 (untag)^[204-209], 直接通过反冲质量谱选择信号事例。此处不标记的意思是, 不要求 ISR 光子被探测器探测到。为了压低本底, 有些工作也会要求 ISR 光子被探测到, 即标记 ISR 光子 (tag)^[210]。一些工作同时使用 tag 方法和 untag 方法^[211-214]。
- **反冲非零质量粒子的反冲质量法:** 即计算除某个非零质量的粒子 (如 D^0 , Λ_c^+) 外, 所有末态粒子的反冲质量, 根据反冲质量谱选择信号事例。由四动量守恒可知, 信号事例的反冲质量谱应集中于该粒子的质量附近。由于可以少重建一个粒子及其衰变产生的多个末态粒子^[215-218], 这种方法大大提升了重建效率。使用这种方法的工作往往要根据正负电子四动量和 ISR 光子四动量, 推算出 ISR 光子以外的所有末态粒子的四动量之和, 由此测量其不变质量谱。高能光子在量能器中的分辨率可接近 100 MeV, 所以在计算前面提到的不变质量谱之前, 需要对高能光子的能量进行修正。修正的方法是通过运动学拟合, 将 ISR 光子和已重建的粒子的反冲质量, 约束到反冲粒子的质量的世界平均值上。如, 反冲的粒子是 Λ_c^+ 时, 将反冲质量约束到 Λ_c^+ 的质量的世界平均值上。
- **1C 拟合法:** 即通过拟合, 将除 ISR 光子外的所有末态粒子的反冲质量, 约束到光子质量 (零) 上。要求拟合得到的末态粒子动量之和的方向, 与探测到的 ISR 光子的方向, 这两者之间的夹角很小。由此来选择信号事例^[219-221]。1C (one constraint) 是指拟合的约束条件只有一个: 反冲质量等于零。这种方法有意避免在拟合中使用 ISR 光子的能量信息。ISR 光子的能分辨可接近 100 MeV, 并且模拟的 ISR 光子的分辨和真实数据中的分辨有差距。如

果在拟合中使用光子的能量信息，最终估计的重建效率可能会带有不可忽略的偏差。

- **4C 拟合法：**即通过拟合，将包含 ISR 光子在内的所有末态粒子的四动量，约束到正负电子对的四动量上。根据拟合得到的 χ^2 来选择信号事例^[222-224]。由于 ISR 光子分辨的模拟并不完美，此处的 χ^2 在模拟样本中的分布，和其在实验数据的分布不会完全相同，所以需要进行修正，使得两者尽量一致。这种方法的约束一共有四个：能量守恒和三个方向的动量守恒，故称为 4C (four constraint) 拟合法。文献中还会出现 5C，6C 的说法，可以视为 4C 的变种。如文献^[224]在 4C 的基础上，对末态中的两个 π^0 做了质量约束，称为 6C 拟合。
- **3C 拟合法：**即以 4C 拟合法为基础，在拟合中避免使用量能器测得的 ISR 光子的能量，只使用 ISR 光子的方向信息。具体的做法又分为两种：1. 根据除 ISR 光子之外的末态粒子的信息计算 ISR 光子的能量，用这个能量代替量能器直接测得的 ISR 光子能量参与拟合^[225-227]；2. 在拟合中令 ISR 光子的能量为自由参数^[127-128,228-229]。BaBar 实验用 ISR 方法测量 $e^+e^- \rightarrow \pi\pi$ 截面时，使用了上述第一种方法，并在此基础上，额外在拟合中增加一个 FSR 光子，或一个没有被探测到的，沿着束流方向的 ISR 光子^[226-227]。根据拟合的 χ^2 判断当前 ISR 事例是否有额外的 ISR 或者 FSR 光子，更好地进行数据和模拟地对比，提高分析的精度。

附录 E 数学补充材料

E.1 螺旋度角

$D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 衰变中, $\pi^+ \pi^-$ 系统的螺旋度角 (helicity angle) 定义为 $\pi^+ \pi^-$ 静止系中, π^- 动量和 K_S^0 动量的夹角, 记为 $\theta_{\pi^+ \pi^-}$ 。 $\theta_{\pi^+ \pi^-}$ 可用 $K_S^0 \pi^-$ 的质量平方表示:

$$\cos(\theta_{\pi^+ \pi^-}) = \frac{M_{\max}^2(K_S^0 \pi^-) + M_{\min}^2(K_S^0 \pi^-) - 2M^2(K_S^0 \pi^-)}{M_{\max}^2(K_S^0 \pi^-) - M_{\min}^2(K_S^0 \pi^-)}, \quad (\text{E.1})$$

其中, $M_{\max}^2(K_S^0 \pi^-)$ 和 $M_{\min}^2(K_S^0 \pi^-)$ 为 $M^2(K_S^0 \pi^-)$ 的最大和最小值。且

$$\begin{cases} M_{\max}^2(K_S^0 \pi^-) = (E_{\text{rest}}(\pi^-) + E_{\text{rest}}(K_S^0))^2 - (p_{\text{rest}}(\pi^-) - p_{\text{rest}}(K_S^0))^2 \\ M_{\min}^2(K_S^0 \pi^-) = (E_{\text{rest}}(\pi^-) + E_{\text{rest}}(K_S^0))^2 - (p_{\text{rest}}(\pi^-) + p_{\text{rest}}(K_S^0))^2 \end{cases},$$

其中 E_{rest} 和 p_{rest} 为介子在 $\pi^+ \pi^-$ 静止系的能量和动量。对 E_{rest} 有

$$\begin{cases} E_{\text{rest}}(\pi^-) = \frac{M^2(\pi^+ \pi^-) - M^2(\pi^+) + M^2(\pi^-)}{2M(\pi^+ \pi^-)} \\ E_{\text{rest}}(K_S^0) = \frac{M^2(D^0) - M^2(\pi^+ \pi^-) + M^2(K_S^0)}{2M(\pi^+ \pi^-)} \end{cases}.$$

E.2 pdf' 的归一化

章节 5 中, pdf' 为 pdf 位移和形变后的分布。

$$\text{pdf}'_{\text{sig}}(M, Q) = R \cdot \text{pdf}_{\text{sig}}(s_M(b)M + \delta\mu_M(b), s_Q(b)Q + \delta\mu_Q(b)),$$

$$\text{pdf}'_{\text{rnd}}(M, Q) = R \cdot \text{pdf}_{\text{rnd}}(s_M(b)M + \delta\mu_M(b), Q),$$

其中 R 为 pdf 和 pdf' 的归一化因子之比。设

$$\text{pdf}(M, Q) = \frac{F(M, Q)}{\mathcal{N}(m_0, m_1, q_0, q_1)},$$

则归一化因子

$$\mathcal{N}(m_0, m_1, q_0, q_1) = \int_{q_0}^{q_1} \int_{m_0}^{m_1} F(M, Q) dM dQ.$$

其中 m_0, m_1 为 M 的积分上限和下限。 q_0, q_1 为 Q 的积分上限和下限。对 F 位移和形变得

$$F'(M, Q) = F(s_M(b)M + \delta\mu_M(b), s_Q(b)Q + \delta\mu_Q(b)), \quad (\text{E.2})$$

其在 $M \in [m_0, m_1]$, $Q \in [q_0, q_1]$ 区间的归一化因子

$$\begin{aligned}\mathcal{N}'(m_0, m_1, q_0, q_1) &= \int_{q_0}^{q_1} \int_{m_0}^{m_1} F'(M, Q) dM dQ \\ &= \int_{q_0}^{q_1} \int_{m_0}^{m_1} F(s_M(b)M + \delta\mu_M(b), s_Q(b)Q + \delta\mu_Q(b)) dM dQ .\end{aligned}\quad (\text{E.3})$$

令

$$M' = s_M(b)M + \delta\mu_M(b) \quad , \quad Q' = s_Q(b)Q + \delta\mu_Q(b) \quad . \quad (\text{E.4})$$

则

$$\mathcal{N}'(m_0, m_1, q_0, q_1) = \frac{1}{s_Q(b)s_M(b)} \int_{s_Q(b)q_0 + \delta\mu_Q(b)}^{s_Q(b)q_1 + \delta\mu_Q(b)} \int_{s_M(b)m_0 + \delta\mu_M(b)}^{s_M(b)m_1 + \delta\mu_M(b)} F(M', Q') dM' dQ' \quad .$$

则对 pdf'_{sig} 有

$$R = \frac{\mathcal{N}(m_0, m_1, q_0, q_1)}{s_Q(b)s_M(b)\mathcal{N}(s_M(b)m_0 + \delta\mu_M(b), s_M(b)m_1 + \delta\mu_M(b), s_Q(b)q_0 + \delta\mu_Q(b), s_Q(b)q_1 + \delta\mu_Q(b))} \quad . \quad (\text{E.5})$$

对 pdf'_{rnd} 有

$$R = \frac{\mathcal{N}(m_0, m_1, q_0, q_1)}{s_M(b)\mathcal{N}(s_M(b)m_0 + \delta\mu_M(b), s_M(b)m_1 + \delta\mu_M(b), q_0, q_1)} \quad . \quad (\text{E.6})$$

E.3 函数的定义

E.3.1 CB 函数

水晶球 (Crystall Ball, CB) 函数定义如下:

$$CB(x, \mu, \sigma, \alpha, n) = \begin{cases} \left(\frac{n}{|\alpha|}\right)^n e^{-\alpha^2/2} \left(\frac{n}{|\alpha|} - |\alpha| - z\right)^{-n} & , z \leq -|\alpha| \\ e^{-\frac{z^2}{2}} & , \text{others} \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

其中

$$z = \begin{cases} (\mu - x)/\sigma & , \alpha < 0 \\ (x - \mu)/\sigma & , \text{others} \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

CB 函数的积分

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_0}^{x_1} CB(x, \mu, \sigma, \alpha, n) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right) \right) & , -|\alpha| < z_0 \\ A \frac{\sigma}{1-n} \left((B-z_0)^{-n+1} - \left(\frac{n}{|\alpha|}\right)^{-n+1} \right) + \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-|\alpha|}{\sqrt{2}}\right) \right) & , z_0 < -|\alpha| < z_1 \\ A \frac{\sigma}{1-n} \left((B-z_0)^{-n+1} - (B-z_1)^{-n+1} \right) & , z_1 < -|\alpha| \end{cases} \\
 & \quad (E.9)
 \end{aligned}$$

其中

$$A = \left(\frac{n}{|\alpha|} \right)^n e^{-\alpha^2/2} \quad , \quad B = \frac{n}{|\alpha|} - |\alpha| \quad . \quad (E.10)$$

E.3.2 J_{S_U} 函数

无界约翰逊分布 (Unbounded Johnson distribution, J_{S_U}) 定义如下:

$$J_{S_U}(y, y_0, \gamma, \delta, \lambda) = \frac{\delta}{\lambda \sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \times e^{-\frac{(\gamma + \delta \sinh^{-1}(z))^2}{2}} \quad . \quad (E.11)$$

其中, $z = (y - y_0)/\lambda$ 。

E.4 非自共轭道的含时衰变振幅

D^0 的含时衰变振幅可用式 A.3 描述:

$$|T_f(d_1, d_2; t)|^2 = \left| A_f(d_1, d_2) g_+(t) + \bar{A}_f(d_1, d_2) \frac{q}{p} g_-(t) \right|^2 \quad .$$

在自共轭衰变中, 忽略直接 CP 破坏, 由 CP 变换得 $\bar{A}_f(d_1, d_2) = A_{\bar{f}}(d_1, d_2) = A_f(d_2, d_1)$ 。 $\bar{A}_f(d_1, d_2)$ 和 $A_f(d_2, d_1)$ 之间没有总体相位差。对于非自共轭道, $\bar{A}_f(d_1, d_2)$ 无法由 A_f 定义。 $A_f(d_1, d_2)$ 和 $\bar{A}_f(d_1, d_2)$ 可定义为:

$$\begin{aligned}
 A_f(d_1, d_2) &= A'_f(d_1, d_2) \quad , \\
 \bar{A}_f(d_1, d_2) &= A_{\bar{f}}(d_1, d_2) = e^{i\delta} A'_f(d_1, d_2) \quad ,
 \end{aligned}$$

A' 为 D^0 衰变时间为 0 处的衰变振幅。 δ 为平均相位差。此时, 对式 A.3 有

$$|T_f(d_1, d_2; t)|^2 = \left| A'_f(d_1, d_2) g_+(t) + e^{i\delta} \bar{A}'_f(d_1, d_2) \frac{q}{p} g_-(t) \right|^2 \quad .$$

对含时部分 $g_{\pm}(t)$ 有

$$\begin{aligned} g_+(t) &= 1 + O(x^2 \times t^2) \quad , \\ e^{i\delta} g_-(t) &= -(\cos \delta + i \sin \delta)(y + ix)t/2 + O(x^3 t^3) \quad . \end{aligned}$$

忽略 $O(10^{-5} \times t^2)$ 的项, 得

$$\begin{aligned} g_+(t) &= g_+(t)|_{x=x', y=y'} = g'_+(t) \quad , \\ e^{i\delta} g_-(t) &= g_-(t)|_{x=x', y=y'} = g'_-(t) \quad , \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \delta + y \sin \delta \quad , \\ y' &= y \cos \delta - x \sin \delta \quad . \end{aligned} \tag{E.12}$$

此处 x' 和 y' 的定义正是 BaBar 测量 $D^0 \rightarrow K^+ \pi^- \pi^0$ 衰变中的混合参数时使用的定义^[230]。对式 A.3 有

$$|T_f(d_1, d_2; t)|^2 = \left| A'_f(d_1, d_2) g'_+(t) + \bar{A}'_f(d_1, d_2) \frac{q}{p} g'_-(t) \right|^2 \quad . \tag{E.13}$$

由式 E.13, 对非共轭道做含时达利兹图分析时, 直接将 A'_f 和 $\bar{A}'_f$ 带入式 A.3 的 A_f 和 $\bar{A}_f$ 进行拟合, 可直接得到 x' 和 y' 的拟合结果。

致 谢

时光荏苒，转眼间在科大度过了六年的研究生生涯。这六年是充满挑战而精彩的。在此博士论文完成之际，谨向我的老师、同学、家人和朋友表示感谢。

首先感谢我的导师鄢文标教授。鄢老师学识渊博，眼光独到，经验丰富。他带领我进入粒子物理的世界，系统地培养我各方面的科研能力，发挥我的长处，补足我的短板。鼓励我面对困难的问题，同时提供充足的资源。让我一次又一次地超越了原本的自己。在生活上，鄢老师给予了我持续的支持和巨大的帮助。在我生活遇到问题时，鄢老师的帮助大幅减轻了我的压力，使我顺利过渡。

感谢我的导师彭海平教授。彭老师学识渊博，思维敏锐，有着各种实验各方面的丰富经验。彭老师对工作充满热情，让我感受到了一位科研工作者的敬业和对科学事业的热爱。

感谢张子平教授、黄光顺教授、朱莹春副教授在科研与生活上的指导。感谢赵政国教授提供了优越的环境和平台。

感谢混合参数测量工作和 DAFNE 框架的合作者 Angelo Di Canto 研究员。这两个工作中，Angelo 在物理思想上和代码实现上给予了非常多的帮助和指导。Angelo 对细节的敏锐让我感受到了物理实验的美。和 Angelo 交流时，他总是能耐心倾听，确保正确理解我的观点。面对工作中的难点，他愿意给我时间去做一些尝试，并持续的给予帮助和鼓励。在这个过程中，我的物理分析能力和代码实现能力逐步提升。感谢 Hydra 框架的作者、DAFNE 框架的合作者 Antonio Augusto Alves Junior 研究员。Augusto 在 DAFNE 框架的代码实现上给予了非常多的帮助和指导。在 Augusto 的指导下，我对并行计算有了更多的了解。这也间接加快了混合参数测量工作的速度。

感谢 Belle 双光子和陶物理组的 Uehara Sadaharu 教授、Hayasaka Kiyoshi 教授、Boris Shwartz 教授、金忆帆博士、Epifanov Denis 教授。感谢他们持续的耐心指导，使我逐步完善 Belle 物理分析的技能，使得初态辐射分析逐步走向成熟。感谢 Belle 合作组的 Frank Simon 教授、Galina Pakhlova 教授、Kay Kinoshita 教授、Yoshi Sakai 教授、Mikihiko Nakao 教授、Bruce Yabsley 教授、Leo Piilonen 教授和 Youngjoon Kwon 教授。感谢他们在初态辐射分析工作审稿阶段的巨大帮助。

感谢 Belle II 粲物理组的 Giulia Casarosa 副教授、Vishal Bhardwaj 教授、Michel Bertemes 博士、Doris Yangsoo Kim 教授、Alan Schwartz 教授、Jake V Bennett 博士、Emma Oxford 博士、Sanjeeda Bharati Das、Chanchal Sharma。粲物理组气氛活跃而融洽，组会上的交流让我受益匪浅。粲物理组协调人 Giulia 充满活力和亲和力。无论什么情况，她在组会中总是传递着一种正能量。刚开始做粲物理的服

务工作和分析时，我常常感到沮丧，那段时间总是能从 Giulia 的发言中得到很多的鼓舞。

感谢 Belle II 合作组的 Keisuke Yoshihara 副教授、管颖慧博士、王博群博士、Hulya Atmacan 博士、Dmitri Liventsev 研究员、Pavel Krokovny 教授、Martin Bessner 研究员和 Yuki Sue。感谢他们在远程取数值班时的诸多帮助。他们让我对 Belle II 探测器有了更多的了解。

感谢 Belle II 中国组的苑长征研究员、沈成平教授、王小龙研究员、王平研究员、易凯教授、刘智青教授、李春花副教授、周兴玉副教授、闫文成副教授、单葳副教授、贾森副研究员、李郁博博士、殷俊昊博士、高宝胜博士、朱文静博士、刘清源博士、张翼、韩潇、李素娴、王子涵、崔峻熙、廖龙洲、李文哲、马俊力、周建设。感谢大家在工作中的交流和帮助。

感谢科大 Belle 和 Belle II 组的师兄李龙科、张亚腾，师姐陈冶薪。感谢他们手把手带我入门 Belle 和 Belle II 的物理分析，让我顺利融入 Belle 和 Belle II 合作组。感谢他们在工作和生活上给予的诸多帮助和指导。

感谢李虹老师、马赛老师、李雯老师、董娟老师、王庆琪老师和刘明辉老师对我生活上的帮助。感谢我的同学：刘成明、齐航、石煌超、陈平涛、郑新千、杜宝宁。感谢实验室的众多师兄师姐及师弟师妹们：周小蓉、刘栋、孙艳坤、薛明萱、卢鹏忠、高鑫磊、王维平、夏磊、李佩莲、潘越、刘钦、魏逸丰、武利波、张艾霖、李贺、单心钰、张言、李旭红、师晓东、刘亮、赵康康、高扬、谢志鹏、贾泽坤、刘卫民、吴言、祖健、张海涛、张越鹏、王博、黄麟钦、刘佳俊、谭雅星、张豪、雷祚弘、徐月、滕佳秀、裴宇鹏、李启铭、徐明、冯珣潼、史华、孙睿、秦龙宇、唐嘉骏、雷天天、马腾、张浩然、赵聪、陈沛东、徐恩珩、孙浩然、王颖、段德勇、许创杰、卢飞翔、王祎景、王咪。感谢他们营造了良好的氛围。和他们在学术上和在生活中的交流，都带来了许多启发，令我受益良多。

感谢一路上陪伴和支持我的朋友们。

最后，诚挚地感谢父母的养育之恩。诚挚地感谢我的家人们。在我遇到生活的困难时，他们给予了难以估量的帮助。感谢他们对我人生之路的巨大支持。

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文

1. G. Gong, L. K. Li, Y. Zhang et al., “Study of $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$ and $\Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ by initial state radiation method at Belle”, Phys. Rev. D **107**, 072008 (2023)
2. L. Wan, G. Gong, H. Liang, G. Huang, “ In situ analysis of unsaturated fatty acids in human serum by negative-ion paper spray mass spectrometry” Analytica chimica acta, 1075, 120-127 (2019)

待发表工作

1. DAFNE: a multi-thread framework for the fitting and generation of time-(in)dependent 3-body decays
2. Model independent measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing in $D^0 \rightarrow K_s^0\pi^+\pi^-$ Decays (BELLE2-NOTE-PH-2023-066)

研究报告

1. G. Gong on behalf of the Belle II Collaboration, “Charmed-meson physics at Belle II”, 19th International conference on B-Physics at frontier machines (Beauty 2020), Sep 21-24, 2020
2. G. Gong on behalf of the Belle II Collaboration, “Status of Belle II measurements related with HVP contribution to muon g-2”, Muon g-2 theory initiative workshop, Jun 28-Jul 2, 2021